ISTITUTO UNIVERSITARIO
DI SCIENZE SOCIALI - TRENTO

QUADERNI DELL'ISTITUTO
SERIE SCIENTIFICA

B. de FINETTI

# LA PROBABILITÀ:
## guida nel pensare e nell'agire

QUADERNO N. 11 - TRENTO 1965

QUADERNI DELLO
ISTITUTO UNIVERSITARIO DI SCIENZE SOCIALI
TRENTO

B. de FINETTI

# LA PROBABILITA':
# guida nel pensare e nell'agire

SERIE SCIENTIFICA — QUADERNO N. 11
TRENTO 1965

Conferenze tenute agli studenti dell'Istituto Universitario di Scienze Sociali di Trento i giorni 31 marzo e 1° aprile 1965, dal Chiar.mo Prof. Bruno de Finetti, Ordinario di Calcolo delle probabilità all'Università di Roma. Indirizzo dell'Autore: via Poggio Catino, 7 - Roma, tel. 832360.

# INDICE

Il presente testo derivante da tre lezioni all'Istituto Universitario di Scienze Sociali, in Trento, il 31 marzo e 1° aprile 1965, è stato rimaneggiato e in vari punti ampliato nel novembre 1965. Le tre lezioni comprendevano rispettivamente gli argomenti dei nn. 1-3, 4-7 ed 8-10 (risp. coi titoli dei nn. 2, 7, 8). Gli argomenti maggiormente rielaborati e ampliati rispetto al testo delle lezioni sono quelli dei nn. 3, 4, 5, 6, 10.

## 1) La probabilità: considerazioni introduttive

In tutti i campi del pensiero, nei rami più diversi delle scienze (fisiche, biologiche, sociali), le spiegazioni apodittiche e deterministiche cedono il passo alle spiegazioni statistiche e probabilistiche, la logica del certo viene rimpiazzata dalla logica del probabile. Da ciò l'importanza sempre crescente, il ruolo sempre più essenziale, della teoria delle probabilità.

Nel suo assetto formale, nei suoi aspetti avanzati, nelle sue applicazioni scientifiche, la teoria della probabilità diviene un ramo della matematica, il calcolo delle probabilità. Esso però, come diceva Laplace, non è che « il buon senso ridotto a calcolo ». E la teoria delle probabilità, prima ancora di avere bisogno di appoggiarsi al calcolo (come avviene per ogni ragionamento quando supera un certo grado di complessità), altro non è che il buon senso stesso: quella specie di buon senso che induce a soppesare in base a tutti gli argomenti ed elementi disponibili il grado di fiducia più o meno grande nei riguardi di ogni cosa, rifuggendo da sconsiderate affermazioni di impossibilità o di certezza. Affermazioni e posizioni che l'evolversi delle scienze e del pensiero si incarica incessantemente di smentire ([1]).

Così stando le cose, sarebbe certamente auspicabile una più diffusa conoscenza del calcolo delle probabilità

---

([1]) Tesi più ampiamente sviluppata ripetutamente altrove, ed in particolare in « Remore e freni sul cammino della scienza », in *Civiltà delle macchine*, 1964.

e delle sue applicazioni fra coloro che vivono ed operano nel campo della scienza, della tecnica, della cultura, ma più ancora mi sembra essenziale generalizzare l'educazione e l'attitudine e l'abito mentale al pensare e ragionare in senso probabilistico, anche e soprattutto da un punto di vista sociologico, per migliorare il modo di pensare e di comportarsi di ciascuno nei riguardi degli altri e della collettività.

Molto ci sarebbe da dire al riguardo volendo anche solo accennare ai numerosi ostacoli che ciò incontra a tutti i livelli, ed anche nel seno della stessa teoria delle probabilità, data la tradizionale propensione a preferire l'illusione di una certezza assoluta alla solidità di un meditato seppur relativo convincimento. Ma ciò allontanerebbe dalla considerazione di ciò che direttamente dovremmo voler vedere realizzato nell'ambito dell'educazione e istruzione di tutti, come fondamentale apporto sul piano psicologico e pedagogico.

Per spiegare con una analogia, osserviamo che c'è qualcosa di preliminare rispetto alla conoscenza della geometria e della fisica, come scienze, ed è la familiarità con alcune nozioni indispensabili per intenderne il senso, come la nozione di lunghezza, la nozione di peso, la nozione di temperatura; familiarità che non consiste nel saperne dare una definizione o spiegazione, ma nell'intendere concretamente, intuitivamente, inavvertitamente, cosa sia una lunghezza di 12 metri, un peso di 4 Kg., una temperatura di + 21° C.

E allo stesso modo, nel campo di cui dobbiamo ora occuparci, esiste qualcosa di preliminare ad ogni teoria o ragionamento sulle probabilità. Quello che occorre, anche qui, per poter anche semplicemente discorrere sensatamente di probabilità, è una familiarità con la sua misura in corrispondenza al proprio grado di incertezza su cui si intende imparare a riflettere. Ed è questa abitudine a cercar di tradurre il grado di incertezza in misura di probabilità, e l'attitudine a farlo con attenzione consapevole, il compito educativo in fatto di probabilità che occorrerebbe a mio avviso collocare in primo luogo ai fini di un affinamento preliminare di quel « buon senso » che, dopo di ciò e grazie a ciò, potrà, per chi vorrà approfondire l'argomento, tradursi in calcolo secondo la espressione citata di Laplace.

Come si potrebbe, nella scuola, educare ad esprimersi in termini di probabilità?

Nella presente esposizione intendo proprio prendere le mosse da concetti e proposte che ho avuto occasione di formulare recentemente al riguardo ([2]), per soffermarmi poi sul modo in cui vanno a inquadrarsi come elemento chiarificatore nell'intero e vasto campo delle effettive applicazioni.

## 2) La probabilità nella psicologia e pedagogia

L'oggetto a cui tali concetti e proposte si riferiscono specificamente è quello delle risposte a domande di questionari od esami in forma di « test »; di per sè, tale metodo, come ogni altro, ha pregi e difetti e si presta ad essere realizzato in modo sciocco od acuto a seconda delle qualità di chi lo applica; non intendo qui occuparmi degli argomenti a favore o contro di esso, pur non potendo esimermi dal dire che giudico deplorevole la contrarietà preconcetta che incontra in Italia ([3]) nono-

---

([2]) In un articolo, « Methods for discriminating levels of partial knowledge concerning a test item », pubblicato in *The British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, vol. 18, I (May 1965), pp. 87-123. Ivi si trovano sviluppati e discussi dettagliatamente e matematicamente i diversi sistemi qui sommariamente presentati.

([3]) Con la lodevole eccezione di Aldo Visalberghi, ordinario di Pedagogia nell'Università di Roma. Di lui cfr. ad es. *Problemi della ricerca pedagogica*, La Nuova Italia ed., Firenze, 1965.

stante tante denunce di difetti e storture dei sistemi di esame tradizionali [4].

Comunque sia, l'aspetto che ci riguarda attualmente è soltanto quello attinente al comportamento del soggetto di fronte alla necessità di decidere come rispondere se è in condizione di incertezza. Naturalmente tutto dipende dalla forma in cui si richiede venga espressa la risposta, e dal sistema di punteggio con cui viene fatta la valutazione. Supponiamo che per ogni domanda sia elencato un certo numero di alternative, di cui una è quella esatta. Per semplicità di esemplificazione (specie per la possibilità di appropriate rappresentazioni grafiche), supporremo in genere che ne siano date tre A, B, C (ma nulla cambia concettualmente se sono in numero qualunque).

Come metodi di risposta, il più semplice e comune consiste nel dover contrassegnare *una e una sola* delle alternative, ritenuta esatta; una variante consiste nel consentire di contrassegnare *una o nessuna* (astenendosi cioè in caso di dubbio); altri metodi consistono nel far cancellare le alternative che uno esclude siano vere (nessuna, o una, o due; in caso di più di tre alternative anche più; a volte il numero di cancellature può venire prescritto o limitato, per es. a non più di due), o nel cancellare quelle escluse, e contrassegnare, tra le altre, quella ritenuta più verosimile.

Altri metodi esamineremo e introdurremo.

La scelta di un metodo di risposta non ha un effettivo valore se non in relazione al sistema di punteggio che vi si associa. Infatti, per avere motivo di ritenere

(4) Cfr. p. es. H. Piéron, *Esami e docimologia*, ed. Armando Armando, Roma, 1965 (con numerose citazioni di altri AA.) e G. Calogero, *Scuola sotto inchiesta*, ed. Einaudi, 1957; menzioniamo anche due articoli di giornale: B. de Finetti, « Il flagello degli esami », *La Stampa*, 5 giugno 1965, e Carlo Cassola e Manlio Cancogni, « L'Italia con la prora », *L'Espresso*, 26 settembre 1965.

che il soggetto, nel dare le risposte, si comporti in modo tale da indicarci lo stato delle sue conoscenze conformemente al criterio da noi desiderato, dobbiamo istituire un sistema di punteggio conseguente, informarne il soggetto e renderlo interessato. Un interesse può venir suscitato materialmente mediante proporzionali compensi o premi, od anche solo moralmente, per spirito di emulazione o di soddisfazione per il conseguimento di un punteggio elevato.

Così ad esempio, per illustrare il concetto sul caso più chiaro, il permettere di contrassegnare *una o nessuna* alternativa (anziché *una e una sola* in ogni caso) deve avere lo scopo di scoraggiare dal « tirare a indovinare » (« guessing »), ma per conseguire tale scopo non basta *consentire* di astenersi dal porre un contrassegno, bensì bisogna discriminare il punteggio premiando chi, nel dubbio, anziché collocare un contrassegno « tirando ad indovinare », se ne è astenuto.

E' proprio a questo punto che ci si presentano questioni di probabilità ed anzi si presenta subito l'occasione di rilevare in modo evidente la diversità in cui esse vengono intese e prospettate secondo il punto di vista piuttosto convenzionale cui si ispirano abitualmente le considerazioni sull'argomento, e quello più realistico e naturale che risponde agli intendimenti qui sostenuti.

Partendo dalla semplice (o semplicistica?) distinzione in due soli casi — o uno « *sa* » qual'è l'alternativa a suo avviso più esatta o « *non lo sa* » — il punto di vista tradizionale porta a dire che nel primo caso la collocazione del contrassegno è fatta da lui con *certezza* (ossia probabilità 100%) e nel secondo « *a caso* » ossia con uguale probabilità fra le r alternative elencate (ossia probabilità $1/r$ : se $r = 3$, probabilità $1/3 = 33\frac{1}{3}\%$ per ciascuna delle tre alternative). In base a tale impostazione si dovrebbe concludere che, per chi *non sa* quale alternativa sia esatta, è conveniente il « tirare ad indovinare » (il « guessing ») o astenersi dal collocare il contrassegno a seconda che il punteggio assegnato in caso di astensione sia inferiore o superiore a $1/r$ (se $r = 3$, ad $1/3$); beninteso, supposto che si dia il punteggio 1 per risposta esatta e 0 per risposta errata. Infatti, scegliendo « a caso » una delle r alternative si ha probabilità $1/r$ di indovinare e conseguire un punteggio 1; ciò vale come « speranza matematica », si direbbe nel gergo del calcolo delle probabilità, $(1/r)\times 1 = 1/r$, $(1/3)\times 1 = 1/3$.

Lo stesso concetto viene impiegato per stimare quanti individui *conoscevano* la risposta esatta, quando si sappia che, su n esaminati, l'hanno data m. Si ammette che quelli che *non* la conoscevano, scegliendo « a caso » fra le r alternative, si saranno suddivisi in r sottogruppi circa uguali, dei quali $r-1$ formano il gruppo degli $n-m$ individui che diedero risposta errata. Pertanto, ogni sottogruppo — e in particolare quello di coloro che diedero la risposta esatta « per caso », indovinando — comprende circa $(n-m)/(r-1)$ individui, cosicché, secondo tale modo di pensare, quelli che conoscevano la risposta dovrebbero essere in numero di, all'incirca,

$$m - (n-m)/(r-1) = (rm-n)/(r-1).$$

Ma questa semplice e netta separazione in due casi specifici, *sa* e *non sa*, questo apodittico « tertium non datur », sta veramente nella natura delle cose e del nostro modo di pensare o non è piuttosto una deformazione intellettualistica provocata dal culto delle idee sedicenti « chiare e distinte »? Non è forse vero al contrario che proprio queste posizioni nette, di assoluta certezza o di assoluta indifferenza, sono astrazioni convenzionali praticamente irraggiungibili? Nessuno può, e meno ancora dovrebbe, dirsi mai assolutamente certo di qualsiasi cosa: quante volte non ci è capitato di accorgerci che una cosa che ritenevamo di sapere o ricordare come certa, era invece sbagliata? Anziché di una certezza dovremmo pertanto parlare sempre, in modo più responsabile e prudente, di una probabilità a nostro avviso (più o meno) elevata. E quando mai fra diverse alternative siamo esattamente neutrali? Abbiamo pur sempre qualche motivo (talora coscientemente riconoscibile e analizzabile, oppure vaga sintesi del subcosciente) che ci fa propendere per ritenere vere piuttosto certe alternative che certe altre. Fra r alternative potremo quindi ripartire la probabilità complessiva del 100% in tutti gli infiniti modi possibili e non solo in parti uguali o altri modi specialissimi. In particolare, fra r = 3 risposte, esplorando il nostro stato d'animo dovremmo rispondere (sia pure con più o meno largo margine di « vaghezza », di « indeterminazione ») che alle tre alternative A, B, C sentiamo di attribuire le probabilità (in %) di essere vere (19,43,38) oppure (72,07,21), oppure (36,25,39) e così via. Anche se, esprimendosi grossolanamente in forma non quantitativa, uno sarebbe incline a dire che *« è certo di B »* o che « è in dubbio (ugualmente) tra B e C » è ben difficile che, riflettendo esattamente sulla valutazione, si senta di tradurla in (00,100,00) e rispettivamente in (00,50,50); potrà essere piuttosto (02,97,01) o (01,51,48), od almeno se si passasse a valutazioni di maggiore precisione sarebbe comunque qualche cosa come (00,08; 99,73; 00,19), ecc..

Ciò vuol dire che, ad esempio, chi asserisce di essere « certo » della risposta B, non lo è quasi mai in realtà fino al punto da non ritenere che sarebbe ragionevole assicurarsi contro un'eventuale grossa perdita che gli derivasse in caso di errore, se gliene fosse offerta la possibilità ad un prezzo sufficientemente basso.

E' facile avere un'immagine visiva di tali situazioni, ossia dell'insieme di tutte le partizioni di probabilità possibili, nel caso di tre alternative A, B, C. (Se fossero quattro, occorrerebbe un'analoga rappresentazione nello spazio anziché nel piano: un tetraedro; per $r > 4$ non basterebbe neppure lo spazio ordinario tridimensionale).

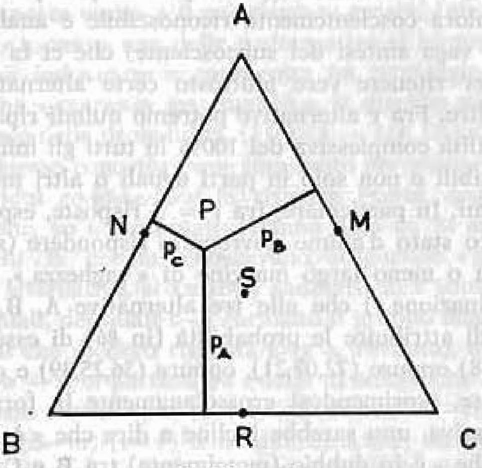


FIG. 1

In un triangolo equilatero (di altezza = 1) per ogni punto P interno (o sul contorno) la somma delle tre distanze dai lati è $p_A + p_B + p_C = 1$ (indichiamo con $p_A$ la distanza dal lato opposto al vertice A, ecc.); perciò ogni tale punto rappresenta un modo di ripartire la probabilità 1 fra le tre risposte, e viceversa.

Per esempio, i punti A, B, C rappresentano la distribuzione di probabilità ove il 100% di probabilità è concentrato in A (100,00,00), certezza per A, in B (00,100,00) o in C (00,00,100); i punti medi M, N, R, dei lati sono quelli che danno nessuna probabilità al vertice opposto, e dividono a metà la probabilità del 100% fra i due vertici estremi del lato: M(50,00,50), N(50,50,00); R(00,50,50); il baricentro S, essendo ad uguale distanza (⅓) da ciascuno dei tre lati, rappresenta l'attribuzione di una probabilità di ⅓ = 33⅓% a ciascuno dei tre casi.

Cosa significa allora, su tale schema, l'adozione del sistema che obbliga a contrassegnare l'alternativa preferita o di quello che consente di astenersene? Nel primo caso è conveniente, ovviamente, contrassegnare la risposta ritenuta più probabile e geometricamente ciò vuol dire rispondere come indicato nella figura 2,

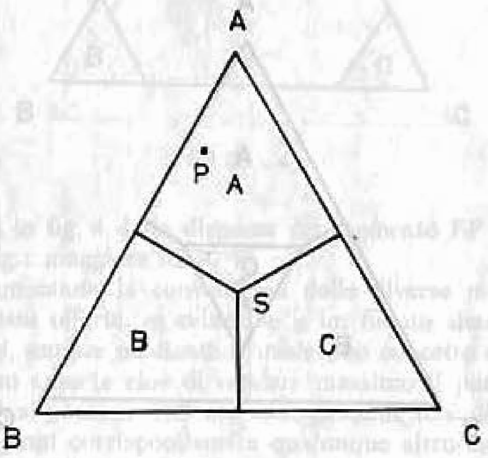


FIG. 2

scegliendo cioè il vertice A o B o C *più vicino* al punto P che rappresenta la posizione di incertezza del soggetto fra le tre alternative. Naturalmente, se P si trova al centro potrà scegliere indifferentemente una qualunque delle tre risposte, e se si trova su segmenti divisori potrà scegliere indifferentemente fra due.

In questo caso comunque, se si assegna un premio a chi indovina, la partizione del triangolo non può essere che quella indicata in fig. 2. Se ha facoltà di astenersi, ma il punteggio stabilito per chi si astiene anziché « tirare ad indovinare » è inferiore a ⅓ (in generale ad 1/r), nulla cambia, perché non ha mai convenienza a valersi di detta facoltà d'astensione. Se il punteggio per l'astensione viene stabilito tra ⅓ e ½, c'è convenienza ad astenersi se P si trova entro il triangolino centrale indicato con O nella fig. 3, e al di fuori come precedentemente.

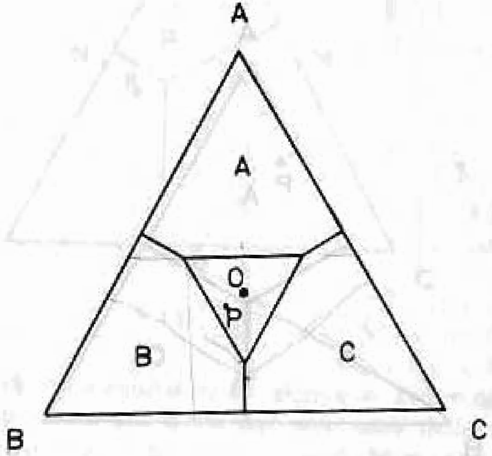


FIG. 3

Se invece quel punteggio si eleva oltre ½ la situazione cambia, diventando quella illustrata in figura 4: c'è convenienza a rispondere A o B o C soltanto se ci si trova nei triangolini verso le punte, mentre al centro la zona O in cui conviene astenersi diviene esagonale; ossia, se si aumenta ad oltre ½ il premio a chi si astiene piuttosto che « tirare a indovinare » conviene indicare con un cerchietto per es. la risposta A, soltanto se a tale risposta uno dà probabilità maggiore di quella

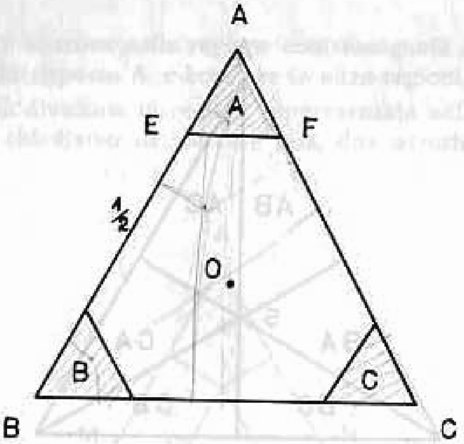


FIG. 4

indicata in fig. 4 dalla distanza del segmento EF da BC (nella fig.: maggiore di 70%).

Esaminando la convenienza delle diverse modalità di risposta offerte, in relazione a un fissato sistema di punteggi, sempre mediante il medesimo concetto seguito in questo caso (e cioè di rendere massimo il punteggio sperato), si possono indicare analogamente le suddivisioni in regioni corrispondenti a qualunque altro caso più o meno complicato.

Se chiediamo di indicare tra alcune alternative (tre), la I e la II (in ordine di probabilità decrescente) la suddivisione in regioni è quella della fig. 5.

Ossia, se si indica come più probabile l'alternativa C e poi la A, ci si trova nel triangolo contrassegnato CA, e così per ciascuno dei rimanenti 5 casi possibili. Se chiediamo di indicare tutte le alternative che, a nostro giudizio, hanno probabilità superiore alla media, nel nostro caso superiore a ⅓, si ha il metodo proposto da Coombs, e la suddivisione in regioni è quella della fig. 6.

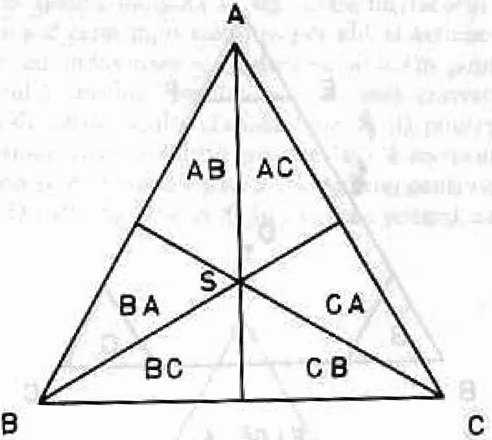


FIG. 5

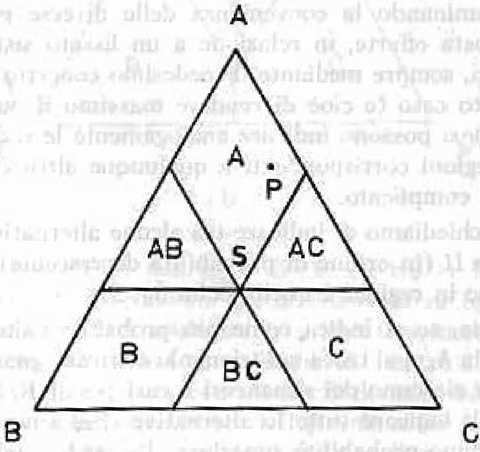


FIG. 6

Ossia se P si trova nella regione contrassegnata A, viene indicata la risposta A, e così per le altre regioni.

La suddivisione in regioni rappresentata nella fig. 7 si ha se chiediamo di indicare una, due o tutte le tre

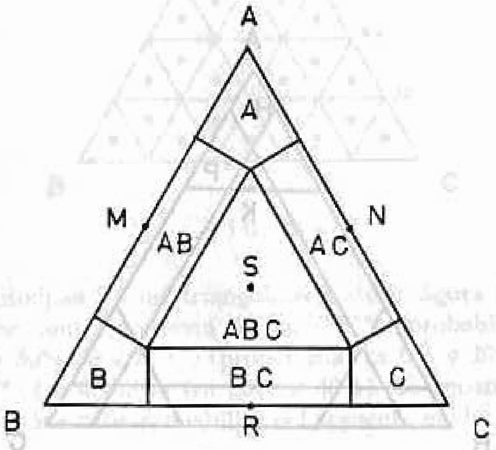


FIG. 7

alternative a seconda che l'opinione sia più vicina alla certezza in una, al dubbio su due (½, ½), al dubbio su tutte e tre le alternative (⅓, ⅓, ⅓). Basta ragionare come fatto nel caso della fig. 1, rispetto ai vertici A(100,00,00), B(00,100,00), C(00,00,100), ma considerando inoltre i punti medi dei lati, M(50,50,00), N(50,00,50), R(00,50,50), ed il baricentro S(33⅓, 33⅓, 33⅓).

Quindi se per es. P si trova nella regione contrassegnata BC, viene indicato come risposta il dubbio che si verifichi l'alternativa B o l'alternativa C.

Se chiediamo di contrassegnare una delle tre alternative soltanto se le si attribuisce probabilità > 70%, e di cancellare nessuna, una o due alternative soltanto se riteniamo che abbiano probabilità inferiore al 10%, la suddivisione in regioni è quella della figura 8, in cui AH è il 10% dell'altezza ed AK il 30%.

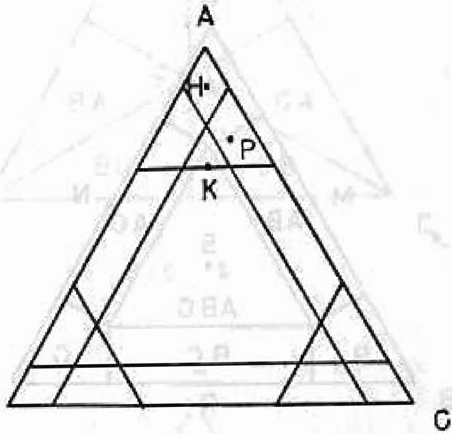


FIG. 8

Quindi, se, per es., P cade nella regione conforme all'indicazione nella figura 8, A viene segnato con un cerchietto e solo B viene cancellato (perché $p_A > 70\%$, $p_B < 10\%$, $10\% < p_C < 70\%$).

Se chiediamo di indicare, per ogni alternativa, se le si attribuisce probabilità fino al 20% una stella (*), da 20% a 40% due stelle (**), da 40% a 60% tre stelle (***), da 60% a 80% quattro stelle (****), e oltre 80% cinque stelle (*****), la suddivisione in regioni è quella della figura 9.

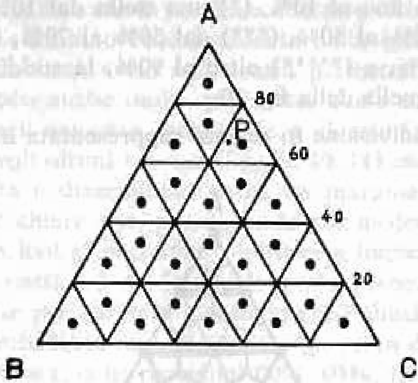


FIG. 9

Quindi se P è nel triangolo segnato in figura 9, significa che contrassegnamo A con (****) (probabilità fra 60% e 80%, B con (*) (probabilità fra 0% e 20%) e C con (**) (probabilità fra 20% e 40%). Se spostiamo la suddivisione delle probabilità nel seguente modo: ( ) nes-

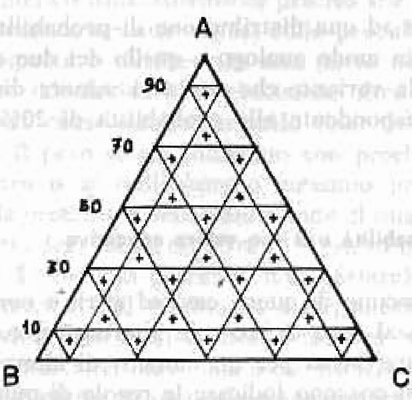


FIG. 10

suna stella fino al 10%, (*) una stella dal 10% al 30%, (**) dal 30% al 50%, (***) dal 50% al 70%, (****) dal 70% al 90%, e (*****) oltre al 90%, la suddivisione in regioni è quella della fig. 10.

La suddivisione in regioni rappresentata in figura 11

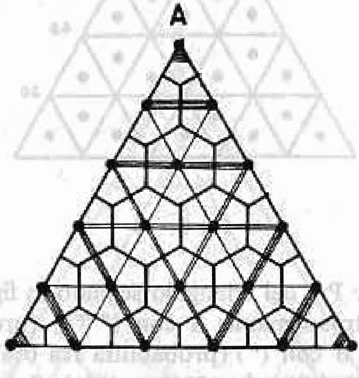


FIG. 11

corrisponde ad una distribuzione di probabilità mediante 5 stelle in modo analogo a quello dei due casi precedenti con la variante che conta la minore distanza dal punto corrispondente alle probabilità di 20% per ogni stella.

### 3) La probabilità e il suo valore educativo

Per ciascuno di questi casi ed altri, e non solo con riferimento al caso di tre sole alternative, comodo per fare le figure, bensì per un numero di alternative qualunque, r, si possono indicare le regole di punteggio cui corrispondono (come fatto nel menzionato articolo).

Ciò significa che è possibile adottare dei sistemi che non solo eliminino l'inconveniente della spinta a « tentare d'indovinare » ma addirittura permettano di arguire, in modo anche molto precisato, quale sia la probabilità che il soggetto attribuisce a ciascuna delle alternative. Negli ultimi tre casi (figg. 9, 10, 11) ciascuna delle probabilità è determinata entro un margine di 20% al più. Ed è chiaro che, proseguendo nel medesimo senso, le suddivisioni si potrebbero infittire e impiccolire a volontà; si potrà ad es. (abbandonando l'espediente delle stelle, utile per bambini e principianti) chiedere di indicare le probabilità numericamente (p. es. in decimi 00%, 10%, 20%, ecc. o in centesimi 00%, 01%, 02% ecc., con diverse possibili varianti come per i casi delle tre figure dette). Anche in tale caso, fissando opportunamente il punteggio in dipendenza della risposta data e dell'alternativa realizzata, ciascuno è obbligato, per seguire il proprio interesse, ossia per massimizzare la speranza matematica di punteggio, a indicare veritieramente la propria valutazione di probabilità. Si potrà dubitare: *ma ha senso chiedere tanto?* Chi è in grado di attribuire un valore numerico sufficientemente preciso alle proprie sensazioni, necessariamente vaghe, sulle probabilità?

La risposta è duplice. Da una parte non è il caso di spingere tale desiderio di precisione oltre il limite del ragionevole: come sarebbe assurdo voler determinare la statura o il peso di un individuo con precisione al decimillimetro o al milligrammo, nessuno pretenderà di spingere la precisione nella valutazione di una probabilità oltre limiti adeguati (p. es. oltre l'1%, salvo in prossimità di 0 e di 1 dove ciò potrebbe non bastare). Ma, sgombrato il terreno dal rischio di interpretazioni assurde per eccessiva pretesa di esattezza, sembra ben possibile ed importante affermare, dall'altra parte, che lo scetticismo nei riguardi di una moderata pretesa di esattezza è infondato.

Ad una migliore valutazione *si può* pervenire, *ed è utile* pervenire: è solo questione di allenamento, così come per imparare ad apprezzare ad occhio una lunghezza, a stimare una durata di tempo od un grado di temperatura. La situazione è diversa solo nel senso che si tratta non di « stimare » qualcosa di esistente al di fuori di noi ma di « tradurre in numeri » qualcosa che esiste soltanto come « sensazione » od « opinione » dentro di noi; ma a parte ciò, la funzione dell'abitudine ad apprezzare numericamente una grandezza è la medesima. Se la funzione è la medesima, l'utilità è non altrettanto grande, ma enormemente più, perché chi non sa stimare una lunghezza od un peso può rimediare impiegando un metro o una bilancia, mentre nessuno strumento esterno permette di misurare ciò che è interno a noi.

In certo senso uno strumento è dato dall'impiego di metodi come quelli ora illustrati: è tuttavia sempre uno strumento che può solo aiutare, non sostituire, l'introspezione che nulla e nessuno, tranne il soggetto stesso, può intraprendere.

Ma, si chiederà, a cosa mai serve il saper dare alle proprie sensazioni di probabilità un valore numerico più o meno accurato? Specie se si ammette, anzi si proclama, che non hanno nessun valore da un punto di vista oggettivo, esterno a chi le sente ed accetta? Anche qui la risposta è duplice. Da una parte è vero che la valutazione numerica non aggiunge nulla al valore puramente soggettivo, psicologico, della sensazione preesistente; chi pensasse di trasformarla in altra cosa per trovare una base diversa per le sue decisioni, sarebbe completamente fuori strada. La base è quella che è; ciascuno non può che regolarsi in base ai propri giudizi.

Tuttavia non è affatto inutile approfondire e affinare la conoscenza dei propri giudizi: se ciò non porta a sostituirli con altri, e meno che mai con qualcosa d'altro, può però, in molti casi, mostrare la necessità di ritocchi per eliminare discordanze e soprattutto insegna ad adeguare ad essi le decisioni. Questa fase è *razionale*, ed è quanto mai opportuno rendersi conto di come debba essere condotta razionalmente, sia pur sempre sulla base degli insostituibili giudizi personali, perché sono facili e frequenti gli errori e le errate concezioni derivanti dalla mancata conoscenza e riflessione dei principi da seguire.

Per tale motivo l'introduzione di sistemi perfezionati di risposta ad esami tipo questionario non sarebbe soltanto un opportuno accorgimento in campo didattico: ben più della sua utilità per questo scopo specifico sarebbe importante, a mio avviso, la sua funzione educativa generale. Funzione educativa nel senso di rendersi maggiormente consapevoli dei propri giudizi di probabilità e di apprendere a meglio precisarli traducendoli in misure numeriche; nel senso di chiarirsi le loro funzioni ai fini della decisione; nel senso di imparare ad impostare matematicamente la scelta della decisione ottima nei casi complessi ove ne vale la pena, e di acquisire il senso di tale scelta in modo da decidere abbastanza correttamente anche dove la decisione venga presa ad intuito o con semplice riflessione non sviluppata con formulazioni e formalismi matematici.

Le considerazioni ora svolte servono così come punto di partenza per quelle che seguiranno, sulla probabilità nella teoria delle decisioni e nella teoria dei giochi. Aver cominciato da questa applicazione di carattere psicologico e didattico costituisce, penso, il migliore punto d'avvio per diverse ragioni. In primo luogo perché si può concentrare l'attenzione semplicemente sugli schemi di valutazione senza farsi distrarre da difficoltà estranee. In secondo luogo, perché qui è chiaro che l'incertezza da misurare riguarda soltanto l'informazione del soggetto che giudica, e non il fatto della verità di questa o quella delle alternative offerte, che di per sè è certamente già accertato e noto; passando ad altri casi non ci sarà ragione pertanto d'immaginare che l'incertezza da misurare debba essere qualcosa di inerente *al fatto* in questione anziché *all'individuo* che è in dubbio. Ed infine, poiché l'impiego di nuovi strumenti non può entrare nell'uso senza un adeguato addestramento — e non vedo migliore modo di provvedervi se non abituando ad applicare metodi del genere sopra descritto nell'ambito della vita scolastica — le indicazioni relative costituiscono una premessa pressoché necessaria per non far dubitare che la méta additata sia irraggiungibile per impossibilità di familiarizzare gli individui con concetti ancora estranei e antagonisti al modo comune di pensare.

Il modo comune di pensare — e ancor più il modo di pensare comunemente istillato dalla scuola e dalla cultura tradizionale — disdegna di attribuire qualunque cosa al « caso » anziché a cause, di ragionare di cose o di leggi probabili anziché certe. In questo senso si tratta di un residuo del determinismo, ormai superato anche nelle scienze, a cominciare dalla stessa fisica che ne era, nell'800, la roccaforte. Ma, come ha gustosamente illustrato, ad es., uno psicologo inglese, John Cohen ([5]), l'idea del caso è talmente estranea alla mente umana che, quando non trova spiegazioni per « cause », essa ricorre, piuttosto che attribuire l'accaduto al « caso », alle più assurde « spiegazioni »: alla *fortuna*, alla *superstizione*, an-

---

([5]) In molti articoli e libri di cui uno tradotto in italiano: J. COHEN, *Caso abilità e fortuna in psicologia*. ed. Universitaria, Firenze 1964 (nella lezione, il 31 marzo 1965 presi lo spunto da una recensione di quel libro apparsa proprio quel giorno su *La Stampa*). Della questione qui toccata (e tra l'altro degli argomenti di Cohen) mi occupo diffusamente all'inizio del volume *L'economia dell'assicurazione* (vol. XVI del « Trattato italiano di economia », UTET Torino) in preparazione (di B. de Finetti, per la 1a parte, più concettuale e introduttiva, e di Filippo Emanuelli per la 2a, più tecnica e applicativa).

che al calcolo delle probabilità ma per utilizzarne *interpretazioni sbagliate.*

Ciò vale in circostanze di ogni tipo, e ci limitiamo ad accennare al caso del gioco (lotto, roulette, . . .) solo perché, pur essendo il più futile in sè, si presta più semplicemente e quindi più efficacemente per un breve commento. Di uno che ha vinto, o che vince spesso, al lotto o altri giochi (casuali) si dice spesso che è *fortunato;* se con tale parola si vuol dire semplicemente che è una fortuna, una cosa gradita, per lui, che il caso l'abbia fatto vincere, nulla di male, ma spesso invece alla parola si associa l'idea di una sua qualità di « essere fortunato », che « spiega » la vincita, attribuendola non al « caso » ma al fatto che « la fortuna gli è favorevole ». E — concretamente, poiché solo le conseguenze concrete di frasi misteriose vanno prese sul serio come significative — si ritiene che gli convenga giocare perché vincerà ancora, e che converrebbe pertanto anche ad altri giocare i numeri che egli gioca. Se invece si ricorre a *superstizioni,* si tratta di rilevare (o prima di decidersi a giocare, o dopo conosciuto il risultato) dei motivi arcani per attendere l'uscita di certi numeri o, dopo, per spiegarla (cabala, coincidenze di date od altro), o per attendere o spiegare la vincita in data occasione (ricorrenze, festività, oroscopi, predizioni, ecc.).

E infine la più assurda di tutte (anzi l'unica matematicamente assurda, perché le altre credenze sono sciocche — o almeno tali le riteniamo — ma di per sè non contengono nulla di logicamente assurdo): il ricorso al calcolo delle probabilità per trarne conclusioni che fraintendono e capovolgono ciò che in esso si dimostra. L'esempio più comune è quello consistente nell'attendere con maggior fiducia che escano, al lotto, i numeri più « arretrati », o il « nero » alla roulette dopo che si è avuto « rosso » parecchie volte di seguito. Se fosse una credenza superstiziosa potremmo senz'altro ritenerla sciocca (col rischio di avere torto); se derivasse da un'effettiva e correttamente eseguita esperienza statistica potremmo dubitare che esista qualche fattore che pregiudica la « casualità » del meccanismo usato (per es. estrazione o moto della pallina) e cercare di individuarlo o escluderlo; ma invece in realtà deriva dall'interpretare a rovescio i risultati della teoria e dell'esperienza. La teoria (cioè le conclusioni deducibili dall'ammissione che tutti i numeri vengano giudicati ugualmente probabili in ogni estrazione o colpo, *indipendentemente dai risultati precedenti, quali che essi siano*) porta a stabilire che ritardi lunghi sono via via più improbabili fino ad essere, se così si vuol dire, praticamente impossibili. L'esperienza statistica è in accordo con tale previsione.

Perciò è un vero e proprio errore di logica prima ancora che di matematica il voler sostenere che dopo un lungo ritardo un numero ha maggior probabilità di uscire *impiegando il ragionamento che è basato sull'ipotesi opposta.* Il fatto che ritardi lunghi siano praticamente impossibili varrebbe anche ammettendo che l'uscita di un numero arretrato divenisse *sempre meno* probabile (perfino tendendo a zero, purché non troppo rapidamente); vale, come detto, nella consueta ipotesi di indipendenza, di estrazioni o prove « senza memoria » dell'accaduto; e varrebbe, naturalmente, e a maggior ragione, se la probabilità crescesse col ritardo, ma in quel caso dovremmo attenderci che i ritardi lunghi fossero *ancor più rari* di quanto è previsto nella ipotesi normale e di quanto lo sono.

**4) La probabilità nel suo nesso con l'utilità**

La nozione di probabilità acquista un significato ben definito, « operativo », quando la si consideri in relazione a problemi di decisione in condizioni di incertezza.

I problemi di decisione sono quelli in cui si deve cercare la soluzione ottima, secondo le nostre preferenze, fra tutte le alternative accessibili alla nostra scelta; il fatto fondamentale e preliminare è pertanto quello di saper indicare e rappresentarci le nostre preferenze; poi non rimane che da individuare dove esse raggiungono il grado massimo.

Si possono avere problemi di decisione sia in condizioni di certezza che in condizioni di incertezza; il primo caso però costituisce in genere soltanto una semplificazione estrema ottenuta trascurando i fattori di incertezza sempre più o meno presenti.

Siamo infatti in condizioni di incertezza quando il risultato dipende non soltanto dalla scelta che spetta a noi di fare (o, come si dice, dagli elementi che sono « sotto il nostro controllo »), ma anche da altre circostanze aleatorie e comunque incognite e imprevedibili. In particolare può dipendere anche da decisioni di altri individui, ispirate da moventi e interessi in conflitto coi nostri, ma allora entriamo nei problemi di « teoria dei giochi ».

Vediamo ora anzitutto (n. 4) come si esprimano le preferenze, dapprima in condizioni di certezza per poi innestare le probabilità pervenendo alle condizioni d'incertezza, per passare — dopo altre indispensabili indicazioni (nn. 5 e 6) — all'applicazione alle decisioni in condizioni di incertezza (n. 7) ed infine a quelle rientranti nella teoria dei giochi (nn. 8 e 9).

Nel caso delle decisioni in condizioni di certezza, dove si tratta di scegliere fra diverse decisioni di cui il risultato è una conseguenza dei dati del problema, potrebbe addirittura sembrare che il problema non esista, potendo noi scegliere senz'altro quella che dà il risultato migliore. Tuttavia, la situazione sarà la stessa anche nel caso di decisioni in condizioni di incertezza non appena saremo riusciti ad estendere ad essi lo strumento per esprimere la preferenza (l'*utilità*); comunque, un vero e proprio problema da studiare, spesso attraverso l'impostazione in forma matematica, si incontra soltanto quando il numero e la complessità delle soluzioni possibili è tale da non consentire una scelta immediata « a vista ». Se ciò si verifica più spesso per decisioni in caso di incertezza non è a motivo dell'incertezza in sè bensì per la maggior complessità che essa, a parità di altre circostanze, comporta.

Anche in condizioni di certezza non è infrequente di dover risolvere problemi complessi di teoria delle decisioni, perché, anche se si suppone che le conseguenze siano certe, non è immediato vedere qual'è la soluzione preferibile. Molti problemi, ad es. problemi di programmazione lineare, riguardano la ricerca del massimo sotto certi vincoli che, pur essendo certi, non permettono di trovare subito la soluzione ottima, ma solo attraverso procedimenti di calcolo che spesso sono tanto complicati da poter essere dominati soltanto da elaboratori elettronici.

E' bene anche sottolineare che, quando diciamo che i problemi di decisione sono quelli in cui si deve cercare la soluzione ottima *secondo le nostre preferenze*, vuol dire che di solito non esiste un obiettivo che sia oggettivamente determinato ed indiscutibile: sovente si cerca la soluzione che è migliore secondo il proprio criterio di preferenza.

Si incontra pertanto una questione preliminare: quella di vagliare le preferenze e di pervenire, attraverso confronti così stabiliti, a tradurle nella costruzione di una funzione-obiettivo, cioè di quella funzione che dovremo cercare di massimizzare. Se si tratta di preferenze *proprie* (dello stesso individuo che imposta il problema) lavorerà di *introspezione*, cioè domanderà a se stesso cosa preferirebbe; se invece egli lavora per altri (un dirigente d'azienda o imprenditore ad altro che lo consulta;

in generale, come si dice, il « Decision Maker », colui cui spetta decidere) dovrà trovare il modo di porgli quesiti e domande in modo adatto per aiutarlo a chiarire a se stesso e a rivelargli chiaramente le sue preferenze (che in genere egli non sa vedere, e peggio esprimere, se non in forma confusa e generica). Più che a domande « verbalistiche » (per es. se si tiene al profitto di quest'anno o al consolidamento della posizione per il futuro o alla conquista di una porzione maggiore del mercato ecc.) occorrono a tal fine domande « operative », cioè « decisioni ipotetiche » di tipo più semplice di quelle reali, ove la complessità delle relazioni fra azione e risultato richiede risposte meditate e precedute da studi e calcoli. Per es., una domanda « operativa » è se preferirebbe, nell'anno, un profitto di 10 milioni in più o la conquista di un 1% del mercato nazionale in più.

Un dato sistema di preferenze si può sempre tradurre in una funzione-obiettivo, ma non in un solo modo: si può infatti sempre alterare arbitrariamente la scala. Massimizzare una grandezza $z$ è la stessa cosa che massimizzare $z^2$, o $-1/z$, o $\log z$, o $e^z$, o qualunque altra funzione *crescente* di $z$ ([0]). In particolare si può immaginare di tradurre la funzione-obiettivo in termini monetari, assumendo come tale $v=v(z)$=*valore di un guadagno certo giudicato equivalente al raggiungimento di una situazione avente z come valore della funzione-obiettivo di partenza.* Genericamente, tutte le funzioni-obiettivo si possono chiamare « indici di utilità » (come è d'uso particolarmente nel caso di decisioni economicamente rilevanti); tra di esse una si chiamerà *utilità* (senz'altro) per il ruolo significativo e fondamentale che ha nel caso di

([0]) I primi tre esempi — per sceglierli semplici — non sono validi se $z$ non è sempre positiva; l'ultimo e infiniti altri sono validi sempre; del resto, qualunque sia $z$, $z' = e^z$ è sempre positivo e si può partire da $z'$.

decisioni in condizioni di incertezza (caso cui ora passiamo, e che, come detto, è il solo che realmente ci interessa); la indicheremo $u=u(z)$.

La teoria delle decisioni in condizioni di incertezza, ammesso di conoscere la funzione-obiettivo per il caso di certezza, richiede soltanto di estendere la definizione al campo delle situazioni incerte. Cioè, ammesso di sapere che a certe situazioni $S_1, S_2, \ldots, S_n$ corrispondono i valori $z_1, z_2, \ldots, z_n$ di una funzione-obiettivo, z, occorre stabilire quale sarà il valore $\bar{z}$ della stessa funzione-obiettivo per la « situazione di incertezza » S consistente nel poter avere a sorte la situazione $S_1$ con probabilità $p_1$, la $S_2$ con probabilità $p_2, \ldots$, la $S_n$ con probabilità $p_n$. La risposta più ovvia apparirà naturalmente quella consistente nel prendere

$$\bar{z} = p_1 z_1 + p_2 z_2 + \ldots + p_n z_n,$$

ossia la media aritmetica ponderata dei valori di z, con le probabilità come « pesi », o — come questa espressione si chiama nella teoria delle probabilità — la « speranza matematica » di z. E tale risposta è anche giusta, salvo una precisazione: evidentemente la formula, la regola, non può andar bene *qualunque sia* la funzione z che si consideri fra l'infinità di « indici di utilità »; potrà andar bene per *una soltanto* (¹), ed è quella cui riserveremo, come accennato, il nome di « *utilità* ».

Non esiste un criterio oggettivo per definirla, ne può esistere, dato che non ha alcun significato oggettivo; per determinarla bisogna ricorrere di nuovo a giudizi di preferenza dell'individuo di cui ci si interessa (il « Decision Maker »). Attribuiti a due situazioni qualunque i valori, per es., $u=0$ e $u=1$, basterà attribuire il valore $u=½$

(¹) A meno, naturalmente, della scelta (arbitraria) dell'origine e dell'unità di misura.

alle situazioni equivalenti a quella di un sorteggio con probabilità uguali (50% - 50%) fra quelle due; col medesimo concetto si può proseguire tutta la funzione. Possiamo dire che l'utilità coinciderebbe col valore del guadagno monetario — sarebbe cioè $u=v$ (o $u(z)=v(z)$, se si pensa di partire da un indice di utilità qualunque, z) — per un individuo che *non avesse alcuna avversione al rischio*. Si può anche considerare praticamente $u=v$, cioè trascurare la distinzione tra valore monetario e utilità, quando si tratta di operazioni di entità non rilevante. Altrimenti, per effetto dell'avversione al rischio, l'utilità cresce meno rapidamente del valore monetario (cioè: un secondo milione dà un aumento di utilità minore del primo, un terzo minore del secondo, e così via, in misura tanto più forte quanto maggiore è, per un dato individuo, l'avversione al rischio (ed in genere anche, naturalmente, in rapporto alla sua ricchezza).

La teoria delle decisioni in condizioni di incertezza, secondo quanto detto, si riduce pertanto alla massimizzazione della *speranza matematica dell'utilità*, o, più brevemente, dell'*utilità sperata*, o, addirittura, semplicemente, dell'*utilità* (la « utilità sperata » non essendo altra nozione dell'« utilità » se non per essere estesa al caso dell'incertezza). Questa è la formulazione data, sostanzialmente, da Daniele Bernoulli fin dal 1730, ma ripresa solo recentemente in base alla dimostrazione che essa costituisce l'unico criterio che soddisfa naturali condizioni di coerenza: la ripropose Ramsey (1926), ebbe risonanza per la presentazione di von Neumann e Morgenstern (1944), pervenne all'assiomatizzazione più spinta con Savage [8].

---

[8] Daniele Bernoulli introdusse la nozione di « speranza morale » (= speranza matematica dell'utilità) in « Specimen theoriae novae de mensura sortis », *Comm. acad. scient. imper. Petropolitanae*, 1738 (accessibile in traduzione inglese su *Econometrica*, 22 [1954]); Frank P. Ramsey (morto in giovane età) espose le sue vedute in due note, « Truth and probability » (1926) e

Nel seguito, per semplicità, e per fissare maggiormente l'attenzione sulla probabilità, trascureremo l'influenza dell'avversione al rischio identificando l'utilità col guadagno in termini monetari (ciò che sappiamo comunque essere lecito per rischi di non eccessiva entità). Esprimere tutto in termini di utilità implicherebbe un cambiamento di scala, e, di per sè, sembrerebbe indifferente l'uso di una scala o di un'altra; però, se consideriamo due operazioni successive (stipulate in termini monetari), il risultato complessivo sarebbe dato dalla somma usando la scala monetaria ma non lo sarebbe usando la scala dell'utilità (perché l'utilità del secondo guadagno dipenderebbe dal guadagno della prima operazione in quanto esso altera il livello di ricchezza cui va aggiunto); di qui la complicazione che è preferibile evitare.

Del resto, il fatto di pensare, in un primo studio, la utilità sostituibile con il guadagno monetario, trascurando la curvatura che viene dall'avversione al rischio, è un po' come, in meccanica, prescindere in un primo momento dall'elasticità, ossia pensare tutti i corpi perfettamente rigidi, salvo ad estendere in un secondo tempo lo studio al caso reale dei corpi elastici. Si tratta di semplificazioni praticamente molto utili, perché danno la possibilità di affrontare i problemi per gradi, facilitandone la comprensione.

---

« Further Considerations » (1928), ripubbl. nella raccolta dei suoi scritti *The Foundations of Mathematics and other logical essays*, Kegan, London, 1931; John von Neumann e Oskar Morgenstern fecero uso dell' utilità nella celebre *Theory of Games and Economic behavior*, Princeton Un. Press, 1944, e ne diedero una trattazione autonoma nella Appendice; l'impostazione di Leonard J. Savage è oggetto del suo volume *The Foundations of Statistics*, Wiley, New York, 1964.

Va rilevato che esistono anche impostazioni difformi da quella sopra indicata, che è però la sola accettabile secondo il punto di vista cui aderisco.

### 5) La probabilità ed i criteri per misurarla

Dobbiamo occuparci soprattutto della probabilità, ma finora ne abbiamo parlato come se si trattasse di concetto già noto. In realtà ne avevamo già parlato a proposito dei sistemi di risposta a questionari, e la via da seguire sarà la stessa di allora; però occorre riprenderla in modo più approfondito. In quel caso, era la *decisione* di un individuo sulla risposta da scegliere che rivelava (se fatta ponderatamente) la valutazione di *probabilità*, e che la rendeva « osservabile » ad altri e pertanto « dotata di senso ». E anche qui dovremo ricorrere a decisioni per rivelarci le probabilità, prima di poter usare le probabilità come elemento per basarvi le decisioni; si tratterà di dispositivi di decisione semplici congegnati espressamente come strumenti di misura, così come un contatore elettrico che è pur sempre una macchina, benché concepita per ottenere una misura anziché per produrre lavoro.

E il dispositivo più semplice altro non è che, sostanzialmente, quello già usato per le risposte a questionari: vedremo infatti che basta perfezionarlo per giungere (teoricamente) a ricavare la valutazione *esatta* delle probabilità. Basta far scegliere, per ogni evento E, un numero x, essendo stabilito che ciò comporterà una penalizzazione pari a $x^2$ se l'evento *E non si verifica* e ad $(1-x)^2$ se invece *E si verifica;* si dimostra facilmente che ciascuno ha convenienza a scegliere per x il valore della probabilità di E secondo la sua opinione. (Più esattamente, definendo tale x come sua probabilità, essa gode di tutte le proprietà volute per tale concetto).

Tale criterio si può adottare senz'altro nel caso di risposte a questionari, e non è altro che l'equivalente del metodo che avevamo presentato rappresentandolo nella fig. 10, quando, anziché limitarsi a poche distinzioni mediante stelle (con intervalli di 20% per le probabilità), si pensi di chiedere le indicazioni delle probabilità esattamente (ad. es.: alternativa A, 13,72%; B, 56,45%; C, 29,83%; beninteso tale precisazione sarà esagerata, ma comunque si suppone che uno indichi il valore con la precisione che desidera, senza limitazioni imposte). Se si verifica A la penalizzazione sarà $(100 - 13{,}72)^2 +$ $+ (56{,}45)^2 + (29{,}83)^2$, ed analogamente nei casi B e C. Geometricamente, sulla figura (solito triangolo, cfr. fig. 12), la penalizzazione, nei tre casi, è rappresentata dal quadrato della distanza tra il punto P (che rappresenta le tre probabilità scelte) e quello risultato (o A, o B, o C), ossia, nei tre casi, $\overline{AP}^2$ o $\overline{BP}^2$ o $\overline{CP}^2$.

Tale significato vale anche nello spazio (tetraedro, se le alternative sono quattro), ed in generale, per r qualunque, nello spazio ad r—1 dimensioni.

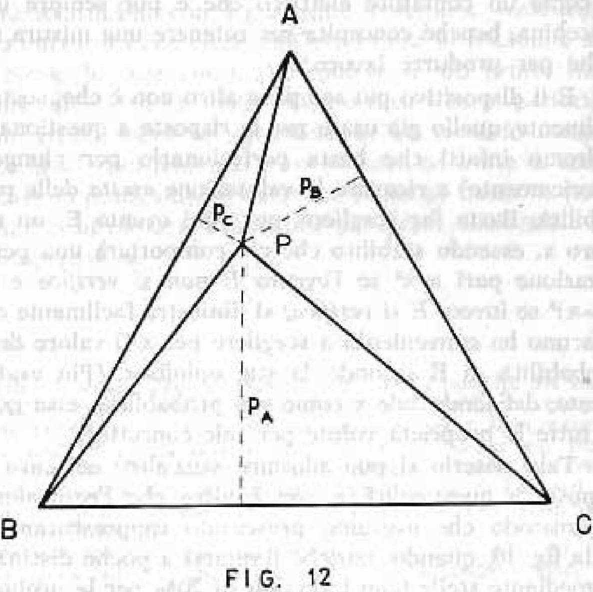


FIG. 12

La speranza matematica di questa penalizzazione è

$$p_A \cdot \overline{AP}^2 + p_B \cdot \overline{BP}^2 + p_C \cdot \overline{CP}^2$$

(ossia il momento di inerzia rispetto a P di A, B, C, coi pesi $p_A$, $p_B$, $p_C$) qualunque sia il punto P indicato; ma, volendo indicare tale punto in modo che tale speranza di penalizzazione sia minima, bisognerà che P sia proprio il punto $P(p_A, p_B, p_C)$. Esso è infatti il baricentro dei punti A, B, C, con pesi $p_A$, $p_B$, $p_C$, cioè

$$P = p_A \cdot A + p_B \cdot B + p_C \cdot C,$$

ed è noto che il momento di inerzia è minimo rispetto a P: prendendo un punto diverso, P', cioè dando un'informazione alterata anziché quella sincera sulle probabilità, la speranza matematica di penalizzazione aumenterebbe di $\overline{PP'}^2$.

Questa spiegazione geometrico-meccanica svolta nel caso di tre eventualità aveva però solo lo scopo di ricollegarci alle considerazioni sui metodi di risposta ai questionari ed alla ormai familiare rappresentazione sul triangolo equilatero. Se è giovata per dare almeno una intuizione su quanto detto nelle precedenti considerazioni, tanto meglio, ma ciò non è necessario. E' sufficiente infatti sviluppare le stesse considerazioni sul caso di un solo evento, E, dove si hanno due alternative, E e non-E (od $\tilde{E}$), caso accennato inizialmente, cui si riconduce quello di tre (o più) eventualità in quanto la penalizzazione nel caso di tre eventualità, A, B, C, non è che la semisomma di tre penalizzazioni su tre decisioni semplici (su A o non-A, su B o non-B, su C o non-C).

Riferiamoci dunque al caso di un evento E (che può verificarsi o non verificarsi: i casi sono due); nella fig. 13 indichiamo sull'asse delle ascisse il caso E nel punto $x=1$ e il caso non-E nel punto $x=0$; ogni punto intermedio ($0 \leq x \leq 1$) rappresenterà la valutazione di probabilità (che dà ad E la probabilità x e ad $\tilde{E}$= non-E la probabilità 1—x). Si noterà che la rappresentazione sul segmento (0,1) è la stessa usata sul triangolo A, B, C, (che ad essa si riduce se uno dei tre casi risulta impossibile: solo il lato opposto rimane supporto di probabilità ammissibili).

Su questo segmento (0,1) si potrebbe, naturalmente, ripetere il ragionamento geometrico-meccanico fatto sul triangolo (il momento di inerzia è minimo nel baricentro), ma è facile anche presentare il risultato in una interpretazione più diretta: quella illustrata nella fig. 13.

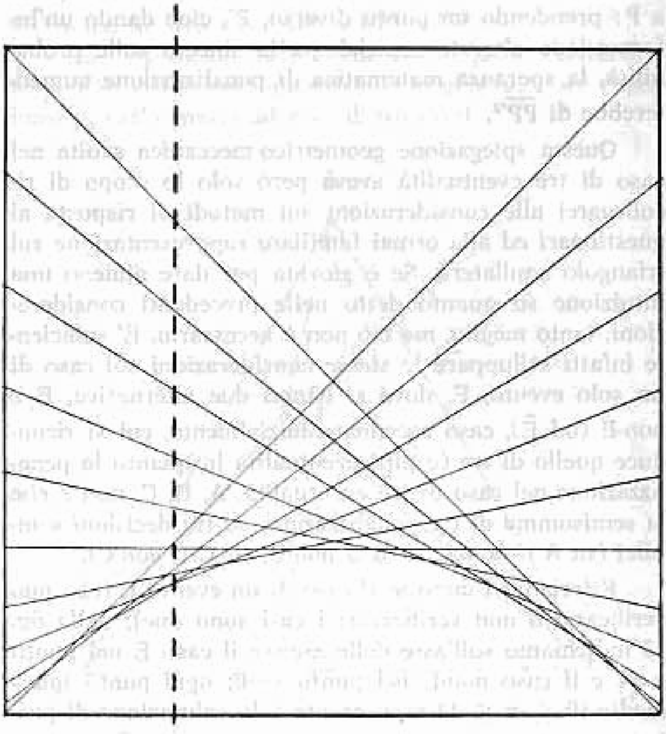

FIG. 13

Il dispositivo di decisione offerto per valutare la probabilità attribuita da un dato individuo ad E consiste nel fargli scegliere un valore x tale che la penalizzazione cui è comunque soggetto valga $x^2$ se E non si verifica ed $(1-x)^2$ se E si verifica. Vogliamo dimostrare che gli conviene scegliere per x il valore che egli attribuisce alla probabilità di E; all'uopo vediamo cosa succede se egli non segue questa norma, scegliendo $x = x_1$ come valore-base per la penalizzazione mentre è $x = x_0$ il valore che attribuisce alla probabilità.

La penalizzazione sarà, nei due casi, $x_1^2$ ed $(1-x_1)^2$, e la sua speranza matematica sarà (per ogni valore x attribuito alla probabilità di E)

$$y = (1-x)x_1^2 + x(1-x_1)^2 = x_1^2 + x(1-2x_1);$$

per ogni valore di $x_1$ abbiamo pertanto una retta, e si tratta, come mostra la figura e come tosto verificheremo, delle tangenti alla parabola $y=x(1-x)$ (nel tratto entro $0 \leq x \leq 1$). Chi valuta la probabilità come $x=x_0$ valuterà in $(1-x_0)x_1^2 + x_0(1-x_1)^2$ la penalizzazione in cui incorre chi sceglie $x=x_1$ come sua base; con facili passaggi l'espressione si trasforma in $x_0(1-x_0) + (x_1-x_0)^2$, il che mostra tutto quel che si era accennato:

— scegliendo $x_1$ diverso da $x_0$ si accresce di $(x_1-x_0)^2$ (sempre positivo!) il valore minimo della penalizzazione, $x_0(1-x_0)$, ottenibile scegliendo $x_1=x_0$, come asserito;

— il valore minimo della penalizzazione ha come grafico la parabola $y=x(1-x)$ (con zeri in $x=0$ e $x=1$, e vertice in $x=½$, $y=¼$): per $x=x_0$ si ha $y=y_0=x_0(1-x_0)$;

— in generale (scrivendo un generico x anziché $x_0$) la retta $y=(1-x)x_1^2 + x(1-x_1)^2$ è anche data da $y=x(1-x) + (x-x_1)^2$; si tratta quindi — come asserito — della tangente alla parabola $y=x(1-x)$ nel punto $x=x_1$ dove la differenza, $(x-x_1)^2$, si annulla senza cambiar segno; volendo precisare — per chi ne sa di più — è un infinitesimo di ordine superiore al primo, e precisamente di secondo, cioè si ha una radice doppia, oppure si annulla anche la derivata, ecc.).

Con queste spiegazioni, la figura parla chiaramente: le tangenti stanno sopra la parabola; l'ordinata minima (in corrispondenza all'ascissa $x=x_0$ che rappresenta la probabilità) si ottiene prendendo la tangente ivi, e ciò significa proprio scegliere come base per la penalizzazione lo stesso valore $x=x_1=x_0$.

### 6) La probabilità per un corretto senso della « previsione »

Usando tale schema potremo rilevare le valutazioni di probabilità di diversi individui su fatti di qualunque genere. Non importa che si tratti di eventi disparati (ciascuno suscettibile di risposta SI o NO, indipendentemente dagli altri) oppure di eventi incompatibili raffigurabili come risposte alternative a una stessa domanda. Se, ad es., abbiamo una domanda che ammette tre risposte, A o B o C, è la stessa cosa che considerare tre domande cui rispondere SI o NO: è vero A?, è vero B?, è vero C? Sono due forme diverse per chiedere la valutazione delle tre probabilità di A, B, C. Si potrà pensare che il caso sia diverso in quanto sarà obbligatorio valutarle in modo che $p_A+p_B+p_C = 1$; in effetti non è che occorra stabilire un obbligo, ma si può dimostrare che è conveniente fare così, altrimenti le valutazioni si potrebbero alterare in modo da diminuire la penalizzazione in tutti e tre i casi. E ciò vale per un numero qualunque di alternative ed altre situazioni comunque complesse; ma ci riferiremo ancora soltanto al caso di tre alternative per pensare sempre al triangolo e a quanto detto al riguardo a proposito di risposte a questionari.

Non ci sarà nessuna diversità, tranne il fatto che qui si tratta di avvenimenti che sono « incerti » nel senso di « ancora imprevedibili per tutti », mentre nel caso dei questionari erano « certi » per l'esaminatore e per le persone informate; ciò importava notare per confutare l'idea che la probabilità sia legata a distinzioni metafisiche sulla « causa » della non conoscenza di chi la giudica: se dovuta al fatto che la cosa appartiene al futuro o che non ne ha avuto notizia o che non la ricorda od altro.

Esempi di valutazioni di probabilità per fatti futuri (per semplicità con tre risposte) potrebbero essere:

| | |
|---|---|
| Il tempo, domani qui, farà | A = pioggia<br>B = coperto, senza pioggia<br>C = sereno |
| In questo esame lo studente N.N. sarà | A = promosso<br>B = rimandato<br>C = bocciato |
| Il processo contro X.Y. si concluderà con | A = ergastolo<br>B = altra condanna<br>C = assoluzione |
| In un dato incontro di calcio, la squadra H conseguirà | A = vittoria<br>B = pareggio<br>C = sconfitta |

Un esperimento è stato fatto, per due anni (Università, Roma, miei allievi alla Facoltà di Economia e Commercio, anni 1960-61 e 1961-62) formulando in termini di probabilità i pronostici per le partite di calcio di Serie A, con risultati interessanti ed incoraggianti circa la possibilità di apprender a meglio apprezzare il valore dei numeri con l'esperienza e a dimostrare l'utilità di una riflessione e competenza nel tener conto di ogni possibile elemento di giudizio (sul valore e stato di forma delle squadre, ecc.).

Questi sono esempi utili di per sè a titolo di esperimento, ma naturalmente le applicazioni importanti sono quelle alle decisioni che la vita ci obbliga continuamente a prendere, in circostanze sempre diverse e spesso imprevedibili.

Ogni allenamento su casi schematici o giocosi è utile se ed in quanto abitua a quel modo di prospettarsi le alternative ed a scegliere tenendo conto delle probabilità nel modo che la teoria prescrive.

Si possono menzionare molti campi in cui lo studio delle soluzioni più convenienti da adottare, secondo i dati e le circostanze di ogni singolo caso, è stato sistematicamente sviluppato e viene largamente applicato nella pratica, ma richiede, come punto di partenza, delle valutazioni di probabilità dipendenti in larga misura da giudizi personali.

Vi sono molti casi in cui si ricorre, prima di prendere una decisione, alla consultazione di un esperto, per averne un parere consistente, propriamente, in una sua valutazione di probabilità. Conviene menzionare, come esempio, il caso di un geologo interpellato circa un progetto di perforazione di un pozzo di ricerca petrolifera; a prescindere dal fatto che si tratta di un caso importante e interessante, ciò è opportuno per l'esistenza di una approfondita indagine sull'argomento, da parte di C.J. Grayson, da cui potremo trarre spunti e citazioni (9).

In tale situazione il geologo « fa delle valutazioni circa le prospettive di successo, e cerca di comunicare queste sue valutazioni ai responsabili della decisione (Decision makers), mediante una descrizione dell'informazione geologica, integrata da *frasi valutative, da classificazioni, o da probabilità numeriche* ». Così dice Grayson, che così commenta: « Le frasi valutative — di cui egli dà, a p. 56, una lista di divertenti esemplificazioni — non hanno alcuna base assoluta nè alcun significato di specifica classificazione. (Tuttavia . . .) tali frasi indubbiamente influenzano, in certa misura, i responsabili della decisio-

---

(9) C. J. GRAYSON, *Decisions under uncertainty: Drilling decisons by oil and gas operators*, Harvard Univ., 1960; citazioni dalle pp. 56-58 e 250-255 (passim).

ne. Le valutazioni numeriche costituiscono di fatto il più utile, ma certamente anche il più controverso, dei metodi per riassumere il giudizio del geologo.

Le valutazioni numeriche sono le più utili per una analisi formale, perché esse rendono possibile di combinare appropriatamente le risposte del geologo con gli altri fattori agli effetti della decisione: in questo modo il Decision maker può ponderare ogni eventualità secondo il grado di probabilità col quale egli sente possa avverarsi. (Ma ...) i numeri non implicano oggettività, o autorità, benché molti abbiano preso la tendenza di vedervi qualcosa di magico: *essi non sono che una diversa forma di linguaggio che permette ai giudizi soggettivi di essere tradotti in una forma più precisa*, e in una forma suscettibile di utilizzazione quando si tratta di inserire la valutazione dell'esperto nell'insieme degli altri aspetti del problema della perforazione ».

L'opportunità di decidere in un senso o nell'altro dipende infatti non solo dalle prospettive dal punto di vista geologico ma da innumerevoli altre circostanze e previsioni (di natura economica, ecc.), come risulta chiaro dall'analisi di Grayson; sarebbe pertanto inadatto chiedergli un consiglio circa la decisione da prendere in pratica.

Nè, d'altra parte, potrebb'essere ragionevole chiedergli una « predizione », una « profezia », cioè una risposta certa se il petrolio in quel punto c'è o non c'è, dato che egli non dispone di prove ma solo di indizi ([10]).

---

([10]) Riportiamo dalle pagine — spesso piene di spirito — del libro di Grayson un significativo aneddoto, atto a far risaltare la fallacia dell'atteggiamento di « disdegno dell'incertezza ». Chi disdegna di decidere in base a sensazioni di probabilità, si compiace in genere dell'autoinganno di proclamare « certa » l'alternativa in base alla quale decide di scegliere la sua azione (anziché riflettere sull'espressione del reale stato di incertezza e di sensazioni e giudizi che è tutto ciò che è ragionevole attingere ed usare come base per l'azione). [*Segue a p.* 44]

E, chiedendo valutazioni di probabilità, sussiste il problema di come indurre il geologo ad avere interesse a dare risposte esattamente rispondenti alla sua opinione: è chiaro ad esempio che, associandolo all'utile dell'operazione (ma non alle perdite) avrebbe interesse a deformare la valutazione in senso ottimista, e associandolo anche alle perdite potrebbe avere interesse opposto per non sopportare perdite derivanti da errate valutazioni di aspetti economici non a lui imputabili, ecc. Questa difficoltà, rilevata e discussa da Grayson, senza pervenire a soluzioni soddisfacenti, mi sembra risulti felicemente risolta col metodo di penalizzazione suggerito. Naturalmente, la penalizzazione consisterebbe, nel caso di un esperto, nella trattenuta di una certa aliquota del suo onorario (e così in generale, nel caso di questionari, pronostici, ecc., sarebbe in genere una decurtazione di un premio o compenso corrisposto ai partecipanti) (11).

---

Ecco l'aneddoto (a pag. 52):

« Un'insegna appesa nell'ufficio di un operatore petrolifero porta questa scritta: POZZI CHE RISULTEREBBERO ASCIUTTI NON DEVONO VENIR PERFORATI. Questa sarebbe realmente una « regola aurea » semmai alcuna impresa petrolifera potesse seguirla. Sfortunatamente, nessuna lo può: neppure questo stesso operatore che, pochi anni fa, in 30 consecutive perforazioni non trovò che pozzi asciutti ».

(11) La concezione di metodi del genere sembra si trovi per le prime volte in una nota di MASANAO TODA del 1951 (che non conosco), « Measurement of intuitive probability by a method of game », *Japanese Journal of Psychology*, 22, pp. 29-40, e in una di J. MC CHARTY, « Measure of the value of information », *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 42 pp. 654-655 (1956). Il problema si era presentato, indipendentemente, in discussioni tra L.J. Savage (che anni prima aveva esaminato un sistema diverso, inedito) e B. de Finetti (che suggeriva il metodo « quadratico » qui esposto); di tale mezzo è stata fatta menzione, quasi simultaneamente in B. DE FINETTI e L. J. SAVAGE, « Sul modo di scegliere le probabilità iniziali », *Bibl. d. Metron*, 1 (1962), B. DE FINETTI e F. MINISOLA, *La matematica per le applicazioni economiche*, ed. Cremonese, Roma, 1961, e da B. de Finetti in un convegno a Brasov (Romania) e in un contributo al volume, curato da I. J. GOOD, *The Scientist speculates: An anthology of partly baked ideas* (ed. Heinemann, London), entrambi del 1962.

Ma la possibilità di ottenere, con metodi concepiti secondo tale intento, delle informazioni non distorte su valutazioni di probabilità dei diversi individui, è cosa di grande importanza ben più in generale, tra l'altro per finalità e applicazioni nel campo della economia. Riportiamo, come significativa testimonianza al riguardo, un passo dell'importante discorso di Haavelmo a Filadelfia ([12]). « Io penso — egli disse — che la più parte di noi ha la sensazione che, se potessimo usare *esplicitamente* delle variabili esprimenti, ad es., ciò che la gente *pensa* su un futuro andamento dei prezzi o dei redditi, o ciò che la gente *pensa* sugli effetti che avranno le loro azioni, saremmo in grado di stabilire relazioni che potrebbero essere più accurate ed avere un maggior valore esplicativo. Ma, siccome le statistiche relative a queste variabili non sono sviluppate abbastanza a fondo, noi non prendiamo abbastanza sul serio il problema di formulare delle teorie basate su queste variabili. E' mia convinzione che, se noi riusciremo a sviluppare più esplicitamente dei modelli economici espressi in termini di queste variabili, *che sono delle cose realmente esistenti nella mente delle persone anche se non sono reperibili negli abituali annuari statistici*, allora apparirà possibile trovare, e si finirà per trovare, *le vie ed i mezzi per ottenere effettivamente delle misure di questi dati* ».

A meno che noi non supponiamo che la gente pensi in termini di illusorie profetiche *predizioni* (certezza nell'avverarsi di specifici fatti attesi), le variabili che si dovrebbero misurare sono le probabilità personali in cui si traduce la formulazione e la misura della personale *previsione*. Si noti la radicale opposizione tra le due no-

---

([12]) T. Haavelmo, « The role of the econometrician in the advancement of economic theory » (Presidential address, Econometric Society, Philadelphia, 29.12.1957), *Econometrica* 26 (1958), pp. 351-357.

zioni designate qui coi termini (nel linguaggio corrente pressoché sinonimi) di *previsione* e *predizione*.

Avevamo precisato che l'importanza di questi metodi di valutazione delle probabilità si riferisce specialmente a quei casi in cui esse sono « dipendenti in larga misura da giudizi personali », e tale frase, prendendola alla lettera, è in contrasto con il punto di vista soggettivistico, cui aderisco, secondo il quale si tratta *sempre* ed *esclusivamente* di giudizi personali. La contraddizione scompare se, a precisazione di quella precisazione, spieghiamo ora che non si trattava di fare una distinzione fra casi di natura diversa, ma solo di accennare alle sfumature, nell'ambito dell'unico caso, di probabilità — cioè — consistente in un giudizio personale, derivanti dalla presenza di più o meno consistenti e pressanti informazioni su circostanze esteriori, oggettive (come i consueti casi di « simmetrie » o di « osservazioni statistiche »), atte a influenzare, generalmente in modo pressoché uniforme, il giudizio della maggior parte delle persone.

Tuttavia, anche in tutti questi casi è altrettanto essenziale, in principio, partire da valutazioni personali, benché in pratica il loro effettivo divario non sia spesso abbastanza forte e determinante per riflettersi in divario percettibile sulla valutazione che interessa. Ma, dal punto di vista teorico sempre, e spesso anche agli effetti pratici, nel ricavare da circostanze esteriori del genere menzionato una opinione personale (attuale o finale), bisogna partire da quelle valutazioni (iniziali) di probabilità che si sarebbero fatte prima di conoscere quelle circostanze, quei risultati di osservazioni o esperimenti di tipo statistico. Per molto tempo gli statistici si sono sforzati di respingere questo principio, che è il teorema di Bayes, cercando di costruire dei metodi statistici *nonbayesiani* di stima, di prova, di decisione; ma sembra ora che siffatta aberrazione perda progressivamente terreno.

Importante ad esempio è l'affermazione fatta al riguardo da Malinvaud nel suo trattato sui metodi statistici nell'econometria ([13]): dopo aver ammesso che i metodi standard (nonbayesiani) possono apparire una sconnessa raccolta di ricette gratuite, ed accingendosi a rimediare, nella sua magistrale esposizione, a tali deficienze col presentare argomenti e chiarimenti a giustificazione di ogni metodo entro i limiti di applicazione che risultano appropriati, egli osserva, tuttavia, che per raggiungere compiutamente il suo intento chiarificatore sarebbe stato desiderabile basarsi sistematicamente sulla impostazione bayesiana e sulle probabilità soggettive, se la teoria e la tecnica della loro applicazione in questi campi fosse già sufficientemente sviluppata.

Accenniamo ancora — più che altro a titolo di curiosità, dato che l'argomento è un po' fuori dal campo che particolarmente ci interessa e che d'altronde non vi ci possiamo soffermare — una applicazione in cui l'impostazione è stata fondata sulla concezione bayesiana. Si tratta di un metodo per la diagnosi del cancro delle ossa mediante elaborazione di dati (dati personali, sintomi, risultanze radioscopiche) affidata a un calcolatore elettronico. La risposta che esso dà consiste nell'elencare le diverse diagnosi compatibili coi dati, e fin qui si tratta di un'analisi semplicemente *logica;* ma poi, per ciascuna di queste diagnosi possibili, viene calcolata la *probabilità,* e questo è il risultato di un'analisi statistico-probabilistica con criterio bayesiano ([14]).

---

([13]) Edmund Malinvaud, *Méthodes statistiques de l'économétrie,* ed. Dunod Paris, 1964. Cfr. p. VIII.

([14]) Si tratta di una ricerca in corso presso il Dept. of Radiology della Università di Missouri, diretto da G. S. Lodwick. Cfr. R. S. Ledley and L. E. Lusted, « Medical diagnosis and modern decision making », in *Mathematical problems in the biological sciences* (Proc. of Symposia in Appl. Math. vol. 14), Amer. Math. Soc., 1962.

Non sarà possibile spiegare maggiormente — qui — in cosa

## 7) La probabilità nei problemi di decisione

Dopo aver detto come l'estensione della nozione di utilità al caso dell'incertezza fornisca in modo ovvio il criterio di decisione in condizioni di incertezza, consistente nel massimizzarla (e dopo osservato che esso si riduce praticamente, per operazioni di limitata entità, di « ordinaria amministrazione », nella massimizzazione della speranza matematica del guadagno in termini monetari), il problema delle applicazioni non è più, concettualmente, un problema; rimane soltanto da richiamare l'attenzione su alcuni aspetti e conseguenze interessanti meno ovvie.

I problemi di decisione che si incontrano nel campo pratico vanno in genere sotto la denominazione di « Ricerca operativa » (15); può trattarsi di decisioni in condizioni di certezza o d'incertezza, ma, a non semplificare troppo la schematizzazione, un'incertezza esiste sempre. Così ad esempio nella teoria delle scorte intervengono fattori di incertezza circa l'andamento dei consumi o vendite, circa i ritardi negli approvvigionamenti, ecc.; nella teoria delle code (o file d'attesa) è in genere aleatoria la successione degli arrivi e spesso anche la durata del servizio; nei calcoli di convenienza aziendale, molte

---

consista il « criterio bayesiano »; tuttavia un'applicazione nel prossimo n. 7 potrà darne, indirettamente, un'idea. Per maggiori chiarimenti sul punto di vista soggettivistico e i suoi rapporti col criterio bayesiano cfr. H. E. Kyburg and H. E. Smokler, *Studies in subjective probability*, Wiley, New York, 1964 (antologia di scritti diversi, tra cui uno del presente autore).

(15) Con tale nome (« Operations Research » in America, « Operational Research » in Inghilterra) furono designati, durante la 2ª guerra mondiale, i metodi matematici impiegati per trovare la migliore soluzione a problemi logistici e strategici. Tali metodi furono poi largamente usati in relazione a problemi dell'industria e ad applicazioni economiche in genere.

previsioni vanno considerate come aleatorie, in particolare quelle riguardanti le vendite, e via dicendo.

In tutti i casi del genere la teoria delle decisioni costituisce la base per trattarli adeguatamente.

Un esempio particolare, su cui conviene soffermarsi per illustrare qualche aspetto della teoria, è quello delle decisioni riguardanti le ricerche petrolifere: esso offre — oltre al già menzionato vantaggio di essere stato ampiamente analizzato e studiato da Grayson — quello di far intervenire direttamente (non frammisti a complicazioni statistiche ecc.) i concetti illustrativi generali. La decisione fondamentale sta nell'effettuare o non effettuare la perforazione di un pozzo di ricerca in un dato punto, e, subordinatamente, nel decidere subito o previa acquisizione di nuove informazioni (per es., pareri di geologi, prospezioni sismiche, ecc.). I fattori di incertezza riguardano anzitutto l'esistenza o meno di un giacimento, e, subordinatamente, la sua potenzialità e profondità, nonché l'ammontare delle spese che si incontrerebbero per la perforazione fino al successo o all'abbandono dell'impresa. Per dare un'esemplificazione numerica, in forma molto semplificata limitiamoci a distinguere tre eventualità: A = insuccesso (non c'è nessun giacimento, almeno fino alla profondità cui si spinge la ricerca), B = successo modesto, C = successo rilevante; le decisioni possibili siano per ora soltanto $D_1$ = *sì* (perforare) e $D_2$ = *no* [18].

---

[18] Altre decisioni potrebbero essere (Cfr. Grayson) diverse modalità di dividere la partecipazione all'impresa o determinati rischi di essa con altri. Non le menzioniamo sia perché la precisazione di tali modalità appesantirebbe inutilmente l'esposizione, e sia soprattutto perché tali accordi potrebbero risultare vantaggiosi per entrambi i contraenti solo tenendo conto della curvatura dell'utilità (oppure sotto ipotesi specialissime: per es. se l'esito dell'eventuale perforazione costituisce un'informazione utile per il proprietario di un terreno adiacente).

Indichiamo con —20, +100, +1000 il guadagno nei tre casi A, B, C in caso di perforazione (in termini monetari: sarebbe più giusto in valutazione di utilità dato che si tratta in genere di importi assai rilevanti); nel caso opposto il guadagno è sempre nullo. Se le probabilità di A, B, C sono 90%, 9% e 1%, la speranza matematica del risultato è —1800 +900 +1000 = +100, e c'è convenienza a tentare la perforazione. (Mentre ad es. non ci sarebbe se le probabilità fossero 91%, 8% e 1% : —1820 +800 +1000 = —20; avvertiamo che un valore intorno al 10% per la probabilità di successo corrisponde a una media di risultati di ricerche petrolifere recenti negli USA).

Osserviamo incidentalmente che è in genere istruttiva, e quindi raccomandabile, un'esplorazione di questo genere intesa a rendersi conto di come la conclusione varierebbe modificando le valutazioni (di diversi elementi, costi, prezzi, durate, ecc., ma soprattutto — per quanto ci interessa — delle probabilità).

Se c'è troppa « sensitività » della decisione a piccole alterazioni di tali elementi, potrà risultare opportuna una riflessione più meditata su tali valutazioni di quanto non si fosse fatto in un primo tempo e che sarebbe bastato se le conclusioni fossero risultate nette e non soggette a invertirsi per effetto di ritocchi accettabili. In particolare, il Decison maker del nostro esempio potrebbe essere indotto a ripensare alla valutazione (90, 9, 1)% se l'avesse adottata in quanto valutazione del geologo, mentre prima egli avrebbe propeso per (91, 8, 1)%, o in circostanze analoghe. Va tuttavia osservato che, in dette condizioni, il fatto di prendere una decisione anziché l'altra non è comunque catastrofico, per quanto importanti ne siano le conseguenze; infatti, in un caso come nell'altro, il guadagno sperato rimane circa nullo (ossia sappiamo che siamo verso il confine, tra i casi limite per cui è pressoché indifferente decidere in qualunque modo).

Il confronto potrebbe risultare più significativo se avessimo a considerare un maggior numero di decisioni tra cui scegliere (anziché due, di cui poi una banale in quanto il « no » dà guadagno sempre nullo); converrebbe allora presentare i dati in uno schema della forma seguente (che è opportuno tenere presente per successive considerazioni):

TABELLA $\alpha$

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | $H'$ | $H''$ | $H'''$ |
| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3{}^*$ | $D_4$ | $D_5$ | $D_6$ | | $c'$ | $c''$ | $c'''$ |
| $E_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{14}$ | $a_{15}$ | $a_{16}$ | $p_1$ | $p_1'$ | $p_1''$ | $p_1'''$ |
| $E_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $a_{24}$ | $a_{25}$ | $a_{26}$ | $p_2$ | $p_2'$ | $p_2''$ | $p_2'''$ |
| $E_3$ | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | $a_{34}$ | $a_{35}$ | $a_{36}$ | $p_3$ | $p_3'$ | $p_3''$ | $p_3'''$ |
| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3{}^*$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | | | | |
| | $a_1'$ | $a_2'$ | $a_3'$ | $a_4'$ | $a_5'^*$ | $a_6'$ | | | | |
| | $a_1''$ | $a_2''^*$ | $a_3''$ | $a_4''$ | $a_5''$ | $a_6''$ | | | | |
| | $a_1'''$ | $a_2'''$ | $a_3'''$ | $a_4'''$ | $a_5'''$ | $a_6'''^*$ | | | | |

Qui le decisioni (sei) corrispondono alle colonne, gli eventi (tre, come A, B, C; per generalità indicati $E_1$, $E_2$, $E_3$) alle righe, i valori (come $a_{25}$: all'incrocio della colonna 5 con la riga 2) al guadagno corrispondente alla decisione $D_5$ al verificarsi dell'evento $E_2$. Segue una colonna con le probabilità $p_1$, $p_2$, $p_3$ e, sotto, una riga con le speranze matematiche di guadagno per ogni decisione ($a_1 = p_1a_{11} + p_2a_{21} + p_3a_{31}$, ecc.) [17]. Tra essi il più gran-

(17) Delle altre colonne e righe (con p ed a con apici) diremo dopo (riguardano le questioni sulle informazioni e valore dell'informazione che dobbiamo considerare ancora riguardo all'esempio delle ricerche petrolifere).

de — indichiamolo con $a_h^*$ — ci indica quale sia la decisione, $D_h^*$, più conveniente. Ossia, il criterio generale di decisione prima detto si traduce nell'indicare le probabilità $p_1$, $p_2$, $p_3$, attribuite agli eventi $E_1$, $E_2$, $E_3$; senza di ciò non vi sarebbero elementi per giudicare. In base a queste probabilità verrà calcolato il valore medio $a_1$, $a_2$, ..., $a_6$ del guadagno, se si prendono rispettivamente le decisioni $D_1$, $D_2$, ..., $D_6$. Si dovrà scegliere, fra questi valori medi, il maggiore, che segneremo con un *, e che ci indicherà la decisione preferibile.

Avevamo detto che c'era anche la possibilità di non decidere subito ma attingere prima altre informazioni; come si potrà rispondere al quesito se vale la pena oppure no di eseguire una certa ricerca che ha un dato costo e che può dare, supponiamo, tre diverse risposte H', H'' e H''' (per es. costituenti precisamente una prognosi più favorevole, o neutra, o meno favorevole)?

Nel caso del progetto di perforazione di un pozzo di ricerca, un'informazione potrà essere quella data da una perizia richiesta a un geologo (che, nel caso migliore, comunicherà la sua risposta traducendo già in forma numerica — come detto nel n. 6 — le sue valutazioni di probabilità), oppure quella di una prospezione sismica, i cui risultati modificano le valutazioni iniziali in base alle sue risultanze. Sono questi, fondamentalmente, i due modi in cui una informazione riesce istruttiva ed utile ai fini della decisione: o essa fornisce o suggerisce direttamente una nuova valutazione per le probabilità dei diversi eventi, inducendo ad abbandonare la precedente o a spostarla avvicinandola più o meno strettamente alla nuova, oppure fornisce elementi (in genere oggettivi) atti a trasformare la valutazione precedente in quella ad essa conseguente in base al mutato stato di conoscenze (secondo il principio menzionato col nome di « bayesiano »; non possiamo purtroppo entrare in spiegazioni, che non potrebbero risultare insieme chiare e brevi).

Comunque, perché abbia senso chiedere una tale informazione H occorre anzitutto, evidentemente, che, subordinatamente alle risposte H', H'', H''', le probabilità delle tre eventualità (insuccesso, successo modesto, successo rilevante) risultino modificate rispetto a quelle attuali ($p_1$, $p_2$, $p_3$) altrimenti l'informazione non comporterebbe alcun cambiamento nelle condizioni in cui dobbiamo decidere. Subordinatamente ad H' le probabilità diverranno $p_1'$, $p_2'$, $p_3'$ (ed analogamente per H'' e H'''); dovrà essere $p_1 = c'p_1' + c''p_1'' + c'''p_1'''$ (e così per $p_2$ e $p_3$), dove c', c'', c''' indichino le probabilità che attribuiamo, prima di chieder l'informazione H, alle risposte H', H'' e H'''. Ciò si dimostrerebbe subito in base ai primi teoremi del calcolo delle probabilità, ma, anche senza averne parlato, penso apparirà intuitivo o almeno plausibile che (ed è questo che quella formula dice) la probabilità, ora, sia, per ogni evento, la media di quelle che vi attribuiremmo dopo avuta una delle tre risposte, media ponderata con le probabilità con cui attendiamo le tre risposte. Ciò premesso, è chiaro che, per ciascuno dei tre casi (risposta H' o H'' o H'''), basterà ripetere il confronto precedente, salvo basarci sulle probabilità $p_1'$, $p_2'$, $p_3'$ (o le p'' o le p''') in luogo delle $p_1$, $p_2$, $p_3$; le speranze matematiche saranno le $a_1'$, $a_2'$, . . . , $a_6'$ (e rispettivamente le a'' o a'''), fra cui la massima sarà $a_*'$ (rispettivamente $a_*''$ e $a_*'''$). Se in tutti i casi la decisione indicata dal massimo guadagno sperato risultasse la medesima, l'informazione sarebbe stata inutile; se invece cambia a seconda della risposta, si ha certamente un miglioramento.

La decisione combinata « chiedere l'informazione H e, a seconda che la risposta sarà H' o H'' o H''', prendere la decisione migliore per quel caso » dà infatti un guadagno sperato $c'a_*' + c''a_*'' + c'''a_*''' \geq a_*$ (basta osservare che si avrebbe uguaglianza se al posto di $a_*'$, $a_*''$ e $a_*'''$, che sono i massimi delle loro righe, si ponessero a', a'' e a''' della colonna $a_*$).

A questo aumento del guadagno sperato fa riscontro però, se l'informazione non è gratuita, il costo che si deve affrontare per ottenerla, e il vantaggio che deriva dal chiederla è la differenza fra l'aumento del guadagno sperato ed il costo dell'informazione, ossia tra il *valore* della informazione e il suo *costo*. Stabilito ciò, è chiaro come si possa immediatamente rispondere ad una domanda diversa: quale informazione chiedere se siamo in dubbio tra diverse possibilità (p. es. indagine di un geologo o prospezione sismica per una ricerca petrolifera?). Converrà scegliere di chiedere quell'informazione per la quale è massima l'eccedenza del valore rispetto al costo.

A voler descrivere compendiosamente, nella loro essenza, le conclusioni brevemente illustrate, si potrebbe dire che ogni ragionamento di convenienza, agli effetti di una decisione in condizioni di incertezza, si traduce in una semplice differenza fra profitti e perdite, al solito modo usato da ogni ragioniere, pur di interpretare direttamente le probabilità come prezzi (esprimenti il grado dell'incertezza).

E' questa una conclusione deludente, una degradazione di un tipo di problemi a prima vista pieni di fascino per la loro inafferrabilità, che in tal modo si rivelano banali ed elementari? Sarà questione di gusti e di opinioni: secondo un certo tipo di gusti potrà sembrare ambito e onorevole successo quello consistente nel riuscire a rendere complicate le cose semplici, a rivestirle di terminologie ermetiche e altisonanti, a tradurle in formule con l'impiego di strumenti quanto più possibile elevati ed astrusi. Ma l'ufficio della matematica è, invece, proprio l'opposto: anche quando apparentemente complica le cose, nell'intento di chiararle fino nel profondo e di considerarne tutti gli aspetti con la massima generalità, se non si adagia in oziosi narcisismi perdendo di vista la méta, deve giungere alla massima semplicità possibile. Una conclusione semplice non è la più banale, bensì la più significativa, ed è tanto più meritoria quanto più faticosa e nascosta era la via per inquadrare, in concetti precisi, delle originarie nozioni ingannevoli e sfuggenti, per ridurre a unità una congerie di fatti e problemi apparentemente disparati, per scoprire la chiave che rende semplice e intelligibile il senso e il perché delle conclusioni quando si riesca a portarle a un adeguato grado di visione sintetica.

Riuscire a ridurre la teoria delle decisioni a « ragioneria dell'incertezza » è quindi non una diminuzione, ma il massimo successo; successo che non preclude, beninteso, che per studiare in questo stesso spirito questioni complesse e delicate si richieda l'impiego di mezzi matematici anche complessi e abilità matematiche anche sottili. Che non vanno esibite ove è superfluo, ma vanno tuttavia sfruttate dove necessitano.

### 8) La probabilità nei problemi di strategia

I problemi di cui dobbiamo ora trattare non differiscono da quelli considerati in precedenza se non per un aspetto in certo senso accessorio, seppure comporti notevoli conseguenze. Nella decisione in condizioni di incertezza, occorre tener conto del fatto che il risultato dipende, oltre che dalla decisione da scegliere, anche da circostanze incerte, aleatorie, cioè sconosciute a colui che deve decidere e non dipendenti dalla sua volontà. Può darsi che dipendano da volontà di altri, e ciò non cambia nulla a quanto detto; però, se si tratta di decisioni prese da altra persona in vista di interessi legati a quelli della prima persona considerata, subentrano circostanze peculiari cui si deve riflettere nel valutare le probabilità.

Per fissare le idee conviene ragionare sullo schema già visto (Tabella $\alpha$).

Pensando ora che gli eventi $E_1$, $E_2$, $E_3$, siano decisioni di un altro individuo, e per ricordarlo e per dare allo schema l'opportuna forma simmetrica indichiamole con $D_1''$ $D_2''$ $D_3''$ (« decisioni del secondo individuo ») e contrassegnamo analogamente le $D_1 \ldots D_6$ con un apice ($D_1' \ldots D_6'$) per specificare che si tratta delle decisioni del primo.

TABELLA β

| | $D_1'$ | $D_2'$ | $D_3'$ | $D_4'$ | $D_5'$ | $D_6'$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $D_1''$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{14}$ | $a_{15}$ | $a_{16}$ | $p_1''$ |
| $D_2''$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $a_{24}$ | $a_{25}$ | $a_{26}$ | $p_2''$ |
| $D_3''$ | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | $a_{34}$ | $a_{35}$ | $a_{36}$ | $p_3''$ |
| | $p_1'$ | $p_2'$ | $p_3'$ | $p_4'$ | $p_5'$ | $p_6'$ | |

Ci troviamo in quella situazione particolare di teoria delle decisioni che si chiama « teoria dei giochi » quando il risultato per il secondo giocatore dipende a sua volta anche dalla decisione del primo. Per esempio: nell'ambito della teoria dei giochi possiamo considerare il gioco degli scacchi che può essere ridotto ad uno schema del tipo (β) pensando alle diverse decisioni, che ora chiameremo strategie, precisate nel seguente modo: prima di incominciare la partita, un giocatore stabilisce, per tutte le possibili situazioni in cui potrà trovarsi, quale mossa farà. Ci si riconduce così alla schematizzazione della precedente tabella, dove $D_1'$, $D_2'$, ... $D_6'$ sono le strategie scelte dal 1° giocatore. La differenza rispetto al caso schematizzato nella tabella (α) è che gli eventi $E_1$, $E_2$, $E_3$, sono ora le strategie $D_1''$ $D_2''$ $D_3''$, che dipendono dalla decisione del 2° giocatore. La conclusione detta prima vale ancora: c'è solo da considerare che $p_1$, $p_2$, $p_3$ sono le probabilità che il 1° giocatore attribuisce alla scelta fatta dal 2° fra le strategie $D_1''$, $D_2''$, $D_3''$ e per fare questo il 1° deve tener conto delle decisioni che prenderà il 2° nei riguardi dell'altro giocatore, cioè dello stesso 1°.

In altri termini, il 1° deve chiedersi: quale probabilità assegnerà il 2° al fatto che lo stesso 1° scelga la strategia $D_1'$, $D_2'$ . . . o $D_6'$?

Intanto bisogna sapere quali sono gli interessi che ha il 2° giocatore e ci limiteremo in un primo momento al caso più tipico e in un certo senso più interessante, che è quello in cui gli interessi dei due competitori sono esattamente contrapposti, nel senso che ciò che uno guadagna è perso dall'altro.

E' questo il caso denominato « giochi tra due persone a somma nulla »; in altre parole, e con riferimento allo schema, i guadagni del giocatore 2° sono le stesse $a_{hk}$ della tabella, relative al 1°, cambiate di segno: ad es. se 1° prende la decisione $D_5'$ e 2° la $D_2''$, il guadagno del 1° è $a_{25}$ e quello del 2° è $-a_{25}$, cosicché si ha somma nulla: $a_{25} + (-a_{25}) = 0$.

Rimane fermo che 1° dovrebbe decidere massimizzando la speranza matematica del guadagno (o, meglio, dell'utilità: ma supponiamo per semplicità di esposizione che la differenza sia trascurabile), e che nel fare ciò si baserà sulle probabilità da lui attribuite alle decisioni del 2° (e indichiamole ora $p_1''$ $p_2''$ $p_3''$ anziché p).

Ma ciò vale, simmetricamente, anche per il 2° il quale cercherà di massimizzare il suo guadagno (cioè di minimizzare quello del 1°), in base alla speranza matematica calcolata con le probabilità $p_1'$ . . . $p_6'$ che egli a sua volta attribuisce alle decisioni $D_1'$ . . . $D_6'$ di 1°.

Nulla è cambiato, ma tutto cambia: nel senso che, nel valutare le probabilità delle decisioni dell'altro ciascuno cercherà di mettersi nei suoi panni e pensare come gli converrebbe decidere. E ciò mette in atto una specie di circolo vizioso, in cui ciascuno dei due si prospetta la situazione reciproca di entrambi, essendo avvantaggiato dalla conoscenza o previsione di come si comporterà l'altro.

Vi è un caso semplice in cui esiste una soluzione che si presenta come privilegiata e *quasi* obbligatoria: nel nostro schema il 1° giocatore sceglie una colonna ed il 2° una riga e l'elemento nell'intersezione di queste due linee indica il guadagno del 1° mentre l'opposto di tale valore è il guadagno del 2°.

Se il primo sapesse quale decisione (riga) sceglie il 2°, prenderebbe la decisione (colonna) in cui figura il guadagno $a_{hk}$ massimo. Analogamente se il 2° sapesse quale decisione (colonna) sceglie il 1° prenderebbe la decisione (riga) in cui figura l'elemento $a_{hk}$ minimo che, cambiato di segno, gli darebbe il guadagno massimo. Supponiamo il caso in cui esiste uno degli $a_{hk}$ che è simultaneamente il massimo elemento della sua riga e il minimo della sua colonna (diciamo al solito, per fissare le idee, che sia $a_{25} = V$); un tale punto è detto *punto di sella* o *minimax*, e il corispondente guadagno « *guadagno minimax* ». Se 1° sceglie $D_5'$, è certo di guadagnare *almeno* $a_{25}$; se 2° sceglie $D_2''$ è certo, analogamente, di guadagnare almeno $-a_{25}$; se entrambi si regolano in tale modo il guadagno è certamente $a_{25}$ per il 1° e $-a_{25}$ per il 2°.

Ovviamente se il 1° sceglie $D_5'$ ed il 2° una decisione diversa da $D_2''$ il 1° ha un maggiore guadagno.

Se il 2° sceglie $D_2''$ ed il 1° una decisione diversa da $D_5'$ il 2° ha un maggiore guadagno.

Insomma dipende da ciascuno dei due giocatori di assicurarsi il guadagno minimax. Perciò se ciascuno dei due giocatori pensa che l'altro segua il criterio prudenziale d'assicurarsi il guadagno minimo, allora ognuno attribuirà all'altro la probabilità del 100% che scelga la soluzione minimax.

Evidentemente se abbandoniamo l'idea che il gioco debba svolgersi con tale criterio prudenziale, ossia se un giocatore pensa che l'altro possa sbagliare nella scelta delle decisioni e vuole approfittarne procurandosi un guadagno maggiore, è giusto che applichi la strategia temeraria, naturalmente a suo rischio.

Comunque il fatto che esista il minimax è una circostanza che casualmente (non in generale) può verificarsi.

Nel caso di due sole alternative (per esempio nel gioco a pari e dispari: se è pari vince uno, se è dispari vince l'altro), lo schema del gioco è quello della tabella seguente (se la vincita è 1):

$$\begin{array}{cc} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{array}$$

In questo caso non esiste il minimax: è del resto chiaro che nessuno dei due giocatori può adottare una delle strategie di giocare « sempre pari » o « sempre dispari » senza dare modo all'altro di rovinarlo.

Allora interviene effettivamente la probabilità: differentemente da quanto detto in precedenza, converrà a ciascuno dei due giocatori scegliere a caso una delle due alternative, pari o dispari (per es. sorteggiando con una moneta) [18].

In questo caso la scelta non fornisce una strategia certa corrispondente alla regola ottima da seguire, ma è già possibile stabilire una certa mistura: una probabilità del 50% per ogni alternativa a seconda del risultato del sorteggio (o, in altri casi, potrebbe trattarsi per es. del

---

[18] Ciò è vero a meno che uno non ritenga che l'altro segua, consapevolmente o inconsapevolmente, qualche criterio meno irregolare di quello casuale nell'alternare « pari » e « dispari »; in tal caso potrebbe cercare di « indovinare » le mosse con l'intuito (come tra giocatori di « morra »).

10% per l'una alternativa e del 90% per l'altra, o del 20% e 80%, ecc.).

Queste strategie di nuovo tipo si chiamano miste, in contrapposizione alle strategie pure che sono quelle dette prima, ossia quelle in cui sia stabilito di scegliere una certa alternativa, senza per es. il preventivo sorteggio con la moneta. Per esempio, nel caso di 4 alternative, il sorteggio può indicare il 40%, 20%, 30%, 10% per ciascuna alternativa. Questa è una strategia mista che è una combinazione delle precedenti quattro decisioni.

Il teorema fondamentale di von Neumann, nel caso di giochi fra due persone a somma nulla, dice che, se passiamo all'ambito delle strategie miste, il punto di sella o minimax esiste sempre. Nel caso del gioco pari o dispari si potrebbe dare la spiegazione grafica di fig. 14.

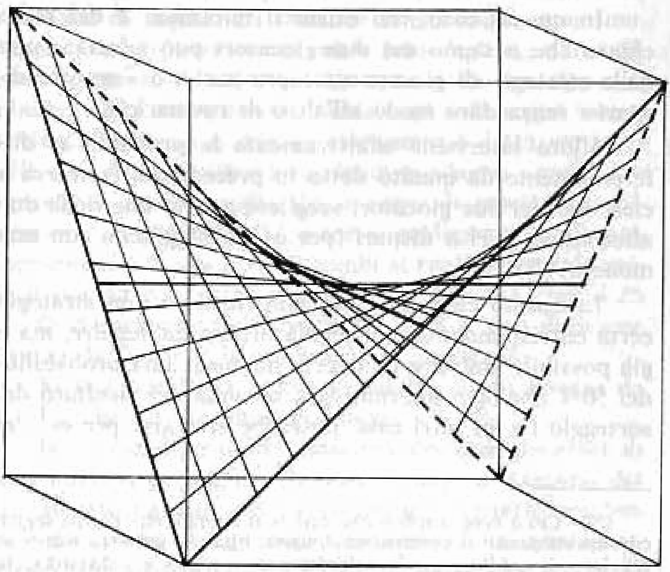

FIG. 14

Nel gioco considerato, sono quattro le risposte possibili dei due giocatori: ossia PP, PD, DP, DD. Se i due giocatori scelgono le strategie miste con probabilità di giocare pari $p'$ e $p''$, e quindi probabilità di giocare dispari $q' = 1 - p'$ e $q'' = 1 - p''$, le probabilità da assegnare nell'ordine a ciascuno dei quattro casi possibili precedenti sono: $p'p''$, $p'q''$, $q'p''$, $q'q''$ ed il guadagno del 1° giocatore ha valore medio (speranza matematica) $p'p'' - p'q'' - q'p'' + q'q''$.

Si ottiene così, come superficie dei guadagni, un paraboloide iperbolico, ed è chiaramente visibile l'esistenza del punto di sella. Se consideriamo una sezione con un piano di livello parallelo alle facce orizzontali e passante per il punto di sella, avremo come sezioni del paraboloide due segmenti perpendicolari, mentre facendo variare il livello si ottengono come sezioni della superficie, ossia come linee di livello, delle iperboli (come nella figura 15).

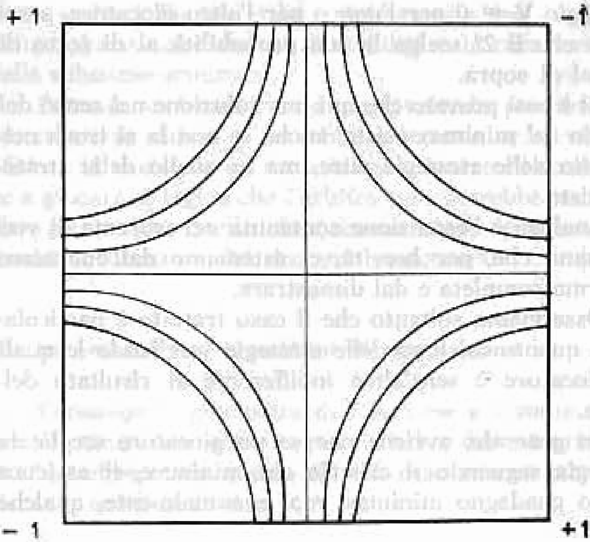


FIG. 15

I due quadranti contrassegnati con +1 sono al di sopra del piano passante per il punto di sella e quelli contrassegnati con —1 sono al di sotto.

Nella base del cubo segnamo in ascissa le probabilità con cui il 1° giocatore sceglie pari o dispari ed in ordinata le probabilità con cui il 2° giocatore sceglie pari o dispari.

In tale caso, i vertici del quadrato, quando la sezione è al livello zero, corrispondono ai valori segnati nella tabella prima detta. Se consideriamo per il 1° giocatore la probabilità ½, qualunque sia la strategia, ossia l'ordinata, scelta dal 2°, la scommessa è equa. Analogamente considerando la probabilità ½ per il 2° giocatore. Ossia la soluzione minimax è $p' = p'' = \frac{1}{2}$ che rappresentano le coordinate del punto di sella ed essendo il gioco equo, la quota da assegnare a tale punto è $V = 0$.

Se fissiamo diversamente il valore delle probabilità per il 1° giocatore incontriamo una delle generatrici (iperboli) del paraboloide; allora il gioco non è equo e si avrà vantaggio $V \neq 0$ per l'uno o per l'altro giocatore, a seconda che il 2° scelga la sua probabilità al di sotto di ½ o al di sopra.

Si è così provato che qui una soluzione nel senso del criterio del minimax esiste, anche se non la si trova nell'ambito delle strategie pure, ma in quello delle strategie miste.

Analoga è l'estensione contenuta nel teorema di von Neumann che, per brevità, ci asteniamo dall'enunciare in forma completa e dal dimostrare.

Osserviamo soltanto che il caso trattato è particolare, in quanto esistono delle strategie scegliendo le quali un giocatore è senz'altro indifferente al risultato dell'altro.

In generale, avviene che se un giocatore sceglie la strategia seguendo il criterio del minimax, si assicura questo guadagno minimax, ma, eventualmente, qualche decisione dell'altro giocatore può influire rendendoglielo più favorevole.

Nel caso particolare trattato la ricerca della soluzione comporta la risoluzione di un sistema di equazioni lineari, mentre nel caso generale qualche equazione del sistema può trasformarsi in disequazione e si ha, quindi, un problema di programmazione lineare.

Quindi, con tutte le riserve prima dette, questa soluzione minimax risponde al problema prima posto.

Ribadiamo che la scelta del criterio del minimax non è obbligatoria perché se uno dei due giocatori, conoscendo la psicologia dell'altro, ha dei motivi per ritenere che l'avversario, invece di attenersi a questa strategia, prenderà altre decisioni, ha convenienza a scegliere la strategia ottima per rispondere alla strategia dell'altro.

Dal punto di vista matematico, la situazione privilegiata delle coppie di strategie che corrispondono al minimax, è la certezza per ciascun giocatore, che la soluzione scelta è l'unica ottima risposta alla decisione dell'altro. Questa circostanza di stabilità è la caratteristica della soluzione minimax.

Per cui, anche in questo caso, volendo pensare alla situazione in cui ci si verrebbe a trovare se si volesse affidare la decisione ad un arbitrato, invece di continuare a giocare, è logico che l'arbitro non potrebbe indicare altro valore che quello che (almeno come speranza matematica) ciascuno dei due può assicurarsi.

## 9) La probabilità e i problemi di competizione

Comunque i giochi fra due persone a somma nulla non costituiscono che il primo stadio della teoria dei giochi, sebbene sia questo il solo caso in cui vale una risposta soddisfacente.

Nel caso di giochi fra due persone a somma non nulla, non esiste alcuna risposta che abbia il grado di ragionevolezza che ha la risposta data dal criterio del minimax nel caso di giochi a somma nulla.

Nel caso che i giocatori siano più di due, subentrano altre circostanze di tipo del tutto diverso.

Innanzi tutto si devono distinguere tanti sottocasi:

se, per esempio, è possibile o lecito giuridicamente trasmettersi delle informazioni o concordare una strategia (nei giochi di carte, di solito, ciò non è permesso; nelle applicazioni economiche, anche se non esistono norme che vietino le decisioni collegiali, a volte è praticamente difficile mettersi d'accordo su una certa strategia per l'influenza di circostanze esterne come le organizzazioni sociali: la mancanza di una rappresentanza sindacale dei lavoratori di una certa azienda, o dei consumatori di un certo bene).

In ogni situazione di questo genere, quindi, lo stesso gioco in forma schematica si traduce in sottocasi molto diversi, a seconda che il gioco sia previsto in forme cooperative o non cooperative. Se è possibile formare delle coalizioni, bisogna fare ulteriori distinzioni in sottocasi, a seconda della loro stabilità (vedasi il trattato di von Neumann e Morgenstern); la formazione e la dissoluzione di queste coalizioni è illimitata. Si può immaginare che i giocatori si dividano in due coalizioni, ma a seguito di determinate proposte di un maggiore vantaggio, alcuni gruppi di giocatori possono passare da una coalizione all'altra. Seguendo la formulazione suggerita da von Neumann e Morgenstern, nel caso di giochi a somma nulla fra n giocatori, possiamo dire che comunque l'insieme S degli n giocatori si divide in due sottoinsiemi S' e S", se i giocatori di S' si mettono d'accordo per giocare contro quelli S" avremo — per i giocatori delle due coalizioni — un valore del gioco:

$$V(S') = -V(S'').$$

Tale soluzione richiede di pensare che i giocatori della coalizione S' decidano di dividere tra loro il guadagno in un certo modo e si dovrà ammettere che non basterà che siano d'accordo di conseguire complessivamente il guadagno che effettvamente possono assicurarsi, ma che siano d'accordo di ripartirlo secondo delle quote prestabilite.

Il risultato di von Neumann-Morgenstern, abbastanza plausibile, è che se si ha comunque una suddivisione in due coalizioni, è sempre possibile che un dato gruppo di individui di S' e di S'', scontenti della quota che loro spetterebbe, formino una nuova, unica coalizione (vedi fig. 16).

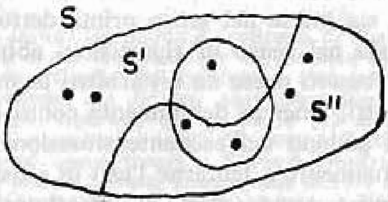


FIG. 16

Quindi non esiste mai una situazione di equilibrio nel senso che, una volta stabilita una certa suddivisione in coalizioni ed una certa regola di ripartizione dei guadagni, questa sia tale da non poter essere subito dopo disciolta.

Esiste una situazione di relativo equilibrio, che pochi Autori ritengono decisiva, secondo la quale se, per esempio, tre individui formanti una coalizione decidono a maggioranza di ripartire il guadagno in un certo modo, è possibile che due di essi decidano di assicurarsi l'intero guadagno escludendo il terzo. Ma tale soluzione può essere cambiata se l'escluso si mette d'accordo con uno dei primi due promettendogli un guadagno maggiore di quello pattuito. Se i primi due giocatori decidono di dividere a metà il guadagno si crea una situazione di equilibrio relativo nel senso che ognuno dei due comprende che avrebbe interesse a mettersi d'accordo con l'escluso, ma teme che il compagno abbandonato possa infliggergli penalità di maggiore rilievo.

### 10) Considerazioni finali

La teoria dei giochi, quindi, dà in certi casi una regola abbastanza convincente, in altri casi cerca di dare delle regole, sia intese nel senso prima detto, di equilibrio labile, sia nel senso di ripartizioni abbastanza ragionevoli se fossero prese da un arbitro in modo da accontentare tutti, tenendo debitamente conto delle possibilità di cui godono nell'esistente situazione, se rinunciassero mutuamente a tentarne l'uso in senso qualificabile più o meno come « sleale », « ricattatorio », « doppio gioco ». Però è discutibile se tali argomentazioni servano veramente, come pensano certi fautori dei vantaggi dell'applicazione di questa teoria, a consigliare a partecipare ad un gioco cercando di avvalersi di quelle conoscenze che queste indagini danno, per trarne il massimo vantaggio possibile.

Sembra ben necessario che queste questioni vengano fatte oggetto di attenta riflessione, e che le riflessioni cui già hanno dato luogo siano divulgate e prospettate come spunto e invito alla meditazione. A tale scopo avevo raccolto, in uno scritto di due anni fa, citazioni che appaiono significative e importanti di autori che si sono interessati dell'argomento e di personalità i cui atteggiamenti e dichiarazioni si inseriscono perfettamente nell'argomento stesso collegandole con opinioni che io stesso avevo avuto occasione di esprimere anteriormente ad altre sviluppate in quell'occasione ([19]).

Da tutte queste riflessioni sembra risultare chiaramente una cosa: la conclusione più profonda è la consapevolezza che in date situazioni nessuna soluzione in senso ragionevole esiste. Dice con ragione il Rapoport: « Il valore della Game Theory non sta nelle specifiche soluzioni che offre in situazioni altamente semplificate e idealizzate, che possono presentarsi in giochi veri e propri ma difficilmente nella vita reale. Piuttosto, il principale valore della teoria sta nel fatto che essa mette a nudo i differenti tipi di ragionamento che si prospettano in differenti tipi di conflitto ».

---

([19]) Lo scritto cui alludo è costituito di due articoli: B. de Finetti, « La teoria dei giochi » e « Riflessioni attuali sulla teoria dei giochi », *Civiltà delle macchine*, 1963 (risp. n. 4 e n. 5), (per gli argomenti qui discussi, particolarmente il secondo).

Le citazioni riportate qui (e molto più ampiamente nello scritto sopra citato) sono tratte da: Anatol Rapoport, « The use and misure of Game theory », *Scientific American*, Dic. 1962, pp. 108-118 e Martin Shubik, *Strategy and market structure (Competition, Oligopoly, and the theory of games)*, Wiley, New York, 1959; quelle da lavori miei saranno contrassegnate da una lettera per indicare le seguenti provenienze (con (*g*) quelle del lavoro citato sopra):

(*a*) « Rôle de la théorie des jeux dans l'économie, et rôle des probabilités personnelles dans la théorie des jeux » (Colloque international d'économétrie, Paris, 12-17 Mai 1952), *Econométrie*, ed. C.N.R.S., Paris, 1953,

(*b*) « Il rischio e le decisioni economiche », *Quaderni Ist. Studi Assicurativi*, n. 11, Trieste, 1954,

(*c*) « Obiettività e oggettività: critica a un miraggio », *La Rivista Trimestrale*, 1, 2, giugno 1962,

(*d*) « L'apporto della matematica nell'evoluzione del pensiero economico » (Conferenza al Congresso dell'Un. Mat. Italiana, Genova, 1963), *Atti*, ed. Cremonese, Roma, 1964 (pp. 238-277).

Le personalità di cui in quello scritto si trovano citazioni sono Giovanni XXIII (« Pacem in terris »; un breve brano riportato anche qui), John F. Kennedy (Discorso all'Università di Washington, 10 giugno 1963), U Thant (Discorso all'Università di Mount Holyoke, 2 giugno 1963) e Adriano Buzzati-Traverso (articolo contro i rischi di una guerra atomica, *L'Espresso*, 2 giugno 1963).

I ragionamenti sviluppati in base alle possibilità offerte dalle diverse situazioni all'interesse egoistico di ciascuno sono istruttivi quando conducono a soluzioni accettabili ma più ancora quando conducono a conclusioni assurde o sconcertanti: ciò rivela infatti « che le decisioni basate sul ben calcolato interesse egoistico possono condurre al disastro ». Un apporto importante della teoria, in ogni caso, sta nell'« offrire agli uomini una occasione — attraverso tecniche di analisi logico-matematiche dei problemi coinvolgenti conflitti di interesse — per togliere i conflitti dal livello della rissa, dove l'intelletto è ottenebrato dalle passioni, portandoli a livello di giochi, dove l'intelletto ha qualche speranza di poter operare ». Tuttavia « il più importante apporto della Game Theory sta nel fatto che l'analisi della Game Theory *rileva la sua propria limitatezza* ».

Una comprensione adeguata dovrebbe fare della teoria dei giochi non un passatempo per giocatori ma un arricchimento della capacità intellettuale di vedere le situazioni in modo penetrante. Tale tipo di comprensione richiede varie cose: esser capaci di tradurre i propri gradi di preferenza in valutazioni di utilità e probabilità; essere « percettivi » nel senso di capire o indovinare le valutazioni altrui; rendersi conto di quando è indispensabile la fiducia, la reciproca comprensione, l'abbandono di giochi congegnati come trappole suicide.

Infatti, come avevo detto in (*c*), « di fronte a un gioco mal congegnato, è assurdo pretendere da un'analisi teorica consigli circa l'inesistente modo di parteciparvi *ragionevolmente*, ma solo la convinzione di doversi tenere in disparte o meglio, se possibile, adoperarsi per la sua abolizione ».

Per riguardo ai problemi dell'economia, ciò porta a sollevare delle fondamentali questioni (come fatto in (*a*); furono riprese e sviluppate in (*b*) e (*d*)): «in quali casi una situazione di optimum può essere raggiunta senza ricorso a forme di cooperazione apparentemente contrarie agli interessi di ogni singolo? Come si potrebbero in tal caso modificare le regole del gioco al fine di far scomparire l'apparente antitesi fra gli interessi di ciascuno considerato isolatamente e gli interessi reali di ciascuno come membro della collettività? O come sarebbe possibile uscire da questo vicolo cieco ricorrendo alla persuasione per ottenere una certa forma di comportamento? ... Sotto quali condizioni e fino a quale punto corrisponde a verità la tesi della raggiungibilità di un optimum come spontaneo equilibrio di interessi liberi di giocare secondo date regole (quelle di un qualunque esistente o ipotetico regime giuridico-economico)? ».

La questione non può essere elusa pretendendo di identificare un particolare sistema con qualcosa che meriti la denominazione di *fair competition;* infatti, come dice Shubik, « ciò che costituisce *fair competition* non può essere definito oggettivamente: ciò dipende dalla politica sociale; tuttavia è opinione dell'autore che al fine di rendere efficiente una politica sociale è necessario che sia capito il fondamento oggettivo dell'analisi della competizione nei vari tipi di mercato ».

Pertanto, più che ad insegnare il presunto miglior modo di comportarsi in ogni determinato regime economico, si potrebbe concludere che la teoria dei giochi sarebbe utile per scegliere il regime che offre il miglior modo di giocare (o di non giocare). Personalmente ritengo infatti (come detto in (g)) che « le considerazioni sulla teoria dei giochi dovrebbero servire di guida nella graduale individuazione e sperimentazione di quel migliore regime economico che risponda alle impostazioni dell'economia del benessere (Welfare Economics), fornendo indicazioni sul migliore coordinamento di decisioni più o meno accentrate e decentrate, e sul modo e la misura in cui queste ultime possono esser affidate a meccanismi basati sull'interesse particolare volendo che ciò effettivamente porti a realizzare e non a contrastare gli obiettivi della collettività ([20]).

E' senz'altro questo, a mio avviso, il problema centrale, mentre è secondario al confronto quello della natura pubblica o privata delle imprese, purché assoggettata ad appropriata regolamentazione. Concordo perciò con l'opinione abbastanza diffusa che il nuovo sistema risulterà da un avvicinamento e fusione dei tipi di pianificazione adottati per imprescindibili esigenze ma in diverse forme in quasi tutti i paesi al di qua e al di là della « cortina di ferro »: penso a ciò non come a un compromesso ma come al risultato della detta analisi logica, come al frutto e coronamento della confluenza di due filoni di pensiero economico parziali e sterili finché divisi.

Tale conclusione gioca in favore della coesistenza, in tema di sistemi economici, e più che di coesistenza pacifica o di coesistenza competitiva si dovrebbe parlare di « coesistenza *evolutiva* » (o qualcosa di simile) per esprimere l'intenzione — che dovrebbe animare in uguale misura entrambe le parti — di approfittare delle esperienze positive e negative proprie ed altrui per migliorare il proprio sistema (secondo linee che potranno o convergere o portare a due soluzioni diverse entrambe abbastanza buone e comunque meno peggiori delle attuali; ciò che rimarrà a vedersi).

Le stesse conclusioni valgono, per motivi analoghi e a maggior ragione, per la coesistenza pacifica in senso politico. La sentenza di U Thant, secondo cui « *la coesistenza* non ha che una alternativa: la *non esistenza* », l'affermazione di Kennedy, secondo cui « un accordo

---

([20]) Concetti del genere si trovano ulteriormente sviluppati in B. de Finetti, « Econometristi allo spettroscopio », in *La Rivista Trimestrale*, 1965 (con particolare riferimento al rapporto di J. Kornaj al 1° Congr. mondiale della Econometric Society, Roma, 1965).

sufficientemente efficace offre ben altra sicurezza e rischi di gran lunga inferiori a una corsa agli armamenti continua, incontrollata, e dagli imprevedibili sviluppi », l'altissima ispirazione di Giovanni XXIII nella « Pacem in terris », sono perfettamente in linea con le precedenti riflessioni basate sulla teoria dei giochi.

Riprendiamole riportando altri passi di Rapoport sull'indispensabilità della fiducia e della comprensione per sfuggire ai giochi congegnati come trappole suicide. « Talvolta — egli dice — dobbiamo essere in grado di convincere l'altro della necessità di giocare secondo certe regole o addirittura di *giocare un altro gioco*. Per convincere l'altro *dobbiamo far sì che egli ci ascolti, e a ciò non è abitualmente possibile riuscire se noi stessi non siamo disposti ad ascoltarlo*. Perciò dobbiamo imparare ad ascoltare nel più largo senso del termine ascoltare, *nel senso di accettare per il momento la visione del mondo dell'altro, perché solo in tal modo potremo renderci intelligibile ciò che egli ci sta dicendo* ».

« Talvolta dobbiamo imparare il significato della fiducia, o altrimenti entrambi, noi e i nostri avversari, saremo invariabilmente perdenti. Nessuna argomentazione indirizzata individualmente all'uno o all'altro può convincerlo che è meglio mantenere le promesse e rinunciare ai ricatti. Soltanto un'argomentazione rivolta ad entrambi nello stesso tempo possiede tale forza. Soltanto una razionalità collettiva può aiutarli a salvarsi dalla trappola del doppio doppio-gioco ».

« Tutte queste accorte riflessioni (skills) si riferiscono *non alla sapienza ma alla saggezza*. Può darsi che se noi perveniamo alla necessaria saggezza molti dei conflitti che gli esperti di strategia, nel loro zelo professionale, insistono a formulare come battaglie tra opposte intelligenze (o, peggio, come battaglie tra opposte volontà) verrebbero risolte di comune accordo ».

Non sembra, questa, una precisa, impressionante, profetica anticipazione e invocazione alla parola di imparziale comprensione, di suprema saggezza, di altissima ispirazione, che il mondo avrebbe accolto un anno dopo con la « Pacem in terris »?

La pace non consiste solo nell'assenza di guerra, ma comunque occorre anche e innanzi tutto preservarla dalla guerra e da ogni lotta rovinosa; per ciò sappiamo che vanno evitate le situazioni di gioco che, in forma non-cooperativa, spingono al doppio doppio-gioco. E infatti, i progetti di disarmo « sono impossibili o quasi, se nello stesso tempo non si procede a un disarmo integrale; se cioè non si smontano anche gli spiriti, adoperandosi sinceramente a dissolvere in essi la psicosi bellica: il che comporta, a sua volta, che *al criterio della pace che si regge sull'equilibrio degli armamenti, si sostituisca il principio che la vera pace si può costruire soltanto nella vicendevole fiducia.* Noi riteniamo che si tratti di un obiettivo che può essere conseguito. Giacché esso è *reclamato dalla retta ragione,* è desideratissimo, e della più alta utilità . . . ».

« E' lecito sperare che gli uomini, incontrandosi e negoziando, abbiano a scoprire meglio i vincoli che li legano, provenienti dalla loro comune umanità; e abbiano pure a scoprire che una fra le più profonde esigenze della loro comune umanità è che tra essi e tra i rispettivi popoli *regni non il timore, ma l'amore,* il quale tende ad esprimersi nella collaborazione leale, multiforme, apportatrice di molti beni ».

E' vero: le promesse e le speranze del 1963 sembrano impallidite e lontane; sono usciti dalla scena i loro grandi artefici e l'umanità sembra scoraggiata e sgomenta; nuove difficoltà si aggrovigliano e non si vede chi possa avere statura sufficiente a farle dissipare. Ma il ricordo di quelle parole e di quelle speranze è un retaggio che rimane vivo nei cuori e non potrà rimanere sterile nei fatti.